

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Второй день, 5 марта 2023 г., XII класс

12.5. Дана функция $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(a) = \int_{-a}^a \frac{dx}{(e^x+1)(|x|+a)}$. Покажите, что I есть постоянная функция.

12.6. Пусть $(3 + \sqrt{8})^{2023} = a + b\sqrt{8}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Покажите, что a есть произведение двух натуральных чисел, с разностью 2.

12.7. Основанием пирамиды $VABC$ есть равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 6\sqrt{2}$ см и $BC = 4\sqrt{6}$ см. Боковые рёбра пирамиды равны $\sqrt{51}$ см. Найдите расстояние между прямыми AB и VC .

12.8. Найдите все дифференцируемые функции $F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которых:

$$F(1) = 1 \text{ и } F\left(\frac{1}{x}\right)F'(x) = \frac{1}{x} \ln x.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Второй день, 5 марта 2023 г., XII класс

12.5. Дана функция $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(a) = \int_{-a}^a \frac{dx}{(e^x+1)(|x|+a)}$. Покажите, что I есть постоянная функция.

12.6. Пусть $(3 + \sqrt{8})^{2023} = a + b\sqrt{8}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Покажите, что a есть произведение двух натуральных чисел, с разностью 2.

12.7. Основанием пирамиды $VABC$ есть равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 6\sqrt{2}$ см и $BC = 4\sqrt{6}$ см. Боковые рёбра пирамиды равны $\sqrt{51}$ см. Найдите расстояние между прямыми AB и VC .

12.8. Найдите все дифференцируемые функции $F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которых:

$$F(1) = 1 \text{ и } F\left(\frac{1}{x}\right)F'(x) = \frac{1}{x} \ln x.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!