

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Первый день, 4 марта 2023 г., XII класс

12.1. Вычислите: $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos(4046x)} dx$.

12.2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = a$, $BC = 2a$, $AA_1 = 3a$. На рёбрах CC_1 и AD берутся точки M и N соответственно так, что $AN = C_1 M = a$. Найдите величину угла между прямыми AM и NB_1 .

12.3. Дано комплексное число $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$. Покажите, что значение отношения $\sqrt{3} \cdot \frac{\operatorname{Re}(z^{2024})}{\operatorname{Im}(z^{2024})}$ есть рациональное число.

12.4. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \dots & 1012^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \dots & 1012^{2023} \end{vmatrix}$.

Покажите, что Δ есть число, делящееся на число $1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 2023!$.

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Первый день, 4 марта 2023 г., XII класс

12.1. Вычислите: $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos(4046x)} dx$.

12.2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = a$, $BC = 2a$, $AA_1 = 3a$. На рёбрах CC_1 и AD берутся точки M и N соответственно так, что $AN = C_1 M = a$. Найдите величину угла между прямыми AM и NB_1 .

12.3. Дано комплексное число $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$. Покажите, что значение отношения $\sqrt{3} \cdot \frac{\operatorname{Re}(z^{2024})}{\operatorname{Im}(z^{2024})}$ есть рациональное число.

12.4. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \dots & 1012^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \dots & 1012^{2023} \end{vmatrix}$.

Покажите, что Δ есть число, делящееся на число $1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 2023!$.

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!