

Olimpiada Republicană la Matematică
5 martie 2023, Clasa a XII-a

12.5. Fie funcția $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(a) = \int_{-a}^a \frac{dx}{(e^x+1)(|x|+a)}$. Arătați că I este o funcție constantă.

12.6. Fie $(3 + \sqrt{8})^{2023} = a + b\sqrt{8}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Arătați că a este produsul a două numere naturale, a căror diferență este egală cu 2.

12.7. Baza piramidei $VABC$ este triunghiul isoscel ABC , în care $AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = 4\sqrt{6}$ cm. Muchiile laterale ale piramidei sunt de $\sqrt{51}$ cm. Determinați distanța dintre dreptele AB și VC .

12.8. Determinați toate funcțiile derivabile $F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care: $F(1) = 1$ și $F\left(\frac{1}{x}\right)F'(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

Timp de lucru: 240 de minute.

Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !

Olimpiada Republicană la Matematică
5 martie 2023, Clasa a XII-a

12.5. Fie funcția $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(a) = \int_{-a}^a \frac{dx}{(e^x+1)(|x|+a)}$. Arătați că I este o funcție constantă.

12.6. Fie $(3 + \sqrt{8})^{2023} = a + b\sqrt{8}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Arătați că a este produsul a două numere naturale, a căror diferență este egală cu 2.

12.7. Baza piramidei $VABC$ este triunghiul isoscel ABC , în care $AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = 4\sqrt{6}$ cm. Muchiile laterale ale piramidei sunt de $\sqrt{51}$ cm. Determinați distanța dintre dreptele AB și VC .

12.8. Determinați toate funcțiile derivabile $F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care: $F(1) = 1$ și $F\left(\frac{1}{x}\right)F'(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

Timp de lucru: 240 de minute.

Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !