

**OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ**  
**Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a XII-a**

12.1. Calculați:  $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos(4046x)} dx$ .

12.2. Fie paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , în care  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $AA_1 = 3a$ . Pe muchiile  $CC_1$  și  $AD$  se consideră punctele  $M$  și  $N$  respectiv, astfel încât  $AN = C_1 M = a$ . Determinați măsura unghiului dintre dreptele  $AM$  și  $NB_1$ .

12.3. Fie numărul complex  $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ . Arătați că valoarea raportului  $\sqrt{3} \cdot \frac{\operatorname{Re}(z^{2024})}{\operatorname{Im}(z^{2024})}$  este un număr rațional.

12.4. Fie determinantul  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \dots & 1012^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \dots & 1012^{2023} \end{vmatrix}$ .

Arătați că  $\Delta$  este un număr divizibil prin numărul  $1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 2023!$ .

**Timp de lucru: 240 de minute.**

**Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !**

**OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ**  
**Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a XII-a**

12.1. Calculați:  $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos(4046x)} dx$ .

12.2. Fie paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , în care  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $AA_1 = 3a$ . Pe muchiile  $CC_1$  și  $AD$  se consideră punctele  $M$  și  $N$  respectiv, astfel încât  $AN = C_1 M = a$ . Determinați măsura unghiului dintre dreptele  $AM$  și  $NB_1$ .

12.3. Fie numărul complex  $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ . Arătați că valoarea raportului  $\sqrt{3} \cdot \frac{\operatorname{Re}(z^{2024})}{\operatorname{Im}(z^{2024})}$  este un număr rațional.

12.4. Fie determinantul  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \dots & 1012^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \dots & 1012^{2023} \end{vmatrix}$ .

Arătați că  $\Delta$  este un număr divizibil prin numărul  $1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 2023!$ .

**Timp de lucru: 240 de minute.**

**Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !**