OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Ziua a doua, 5 martie 2023, Clasa a XII–a
Soluții

12.5. Fie funcțiile $I:(0;\ +\infty)\to\mathbb{R}$, $I(a)=\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(e^x+1)(|x|+a)}$. Arătați că I este o funcție constantă.

Soluție.

$$I(a)=\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(e^x+1)(|x|+a)}=\left|\begin{array}{c}x=-t\\ dx=-dt\\ x=-a\Rightarrow t=a\\ x=a\Rightarrow t=-a\end{array}\right|=\int_{-a}^{a}\frac{dt}{(e^{-t}+1)(|t|+a)}=$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{e^t dt}{(e^t+1)(|t|+a)}=\int_{-a}^{a}\frac{dt}{|t|+a}-I(a).$$

Atunci $I(a)=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{|t|+a}=\int_0^a\frac{dt}{t+a}=\ln(t+a)|_0^a=\ln 2$.

12.6. Fie $\left(3+\sqrt{8}\right)^{2023}=a+b\sqrt{8}, a,b\in\mathbb{N}$. Arătați că a este produsul a două numere naturale, a căror diferență este egală cu 2.

Soluție. Avem că

$$\left(3\pm\sqrt{8}\right)^{2023}=3^{2023}\pm C_{2023}^1\cdot 3^{2022}\cdot\sqrt{8}+C_{2023}^2\cdot 3^{2021}\cdot\sqrt{8}^2\pm\cdots\pm\sqrt{8}^{2023}.$$

Atunci $\left(3+\sqrt{8}\right)^{2023}=a+b\sqrt{8},\ a,b\in\mathbb{N}$, implică $\left(3-\sqrt{8}\right)^{2023}=a-b\sqrt{8}, a,b\in\mathbb{N}$ și

$$a=\frac{1}{2}\left(\left(3+\sqrt{8}\right)^{2023}+\left(3-\sqrt{8}\right)^{2023}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{6+2\sqrt{8}}{2}\right)^{2023}+\left(\frac{6-2\sqrt{8}}{2}\right)^{2023}\right)=$$

$$\frac{1}{2^{2024}}\left(\left(6+2\sqrt{8}\right)^{2023}+\left(6-2\sqrt{8}\right)^{2023}\right)=\frac{1}{2^{2024}}\left(\left(2+\sqrt{2}\right)^{4046}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{4046}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{2024}}\left(\left(\left(2+\sqrt{2}\right)^{2023}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{2023}\right)^2-2\left(2+\sqrt{2}\right)^{2023}\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)^{2023}\right)=$$

$$\frac{1}{2^{2024}}\left(\left(\left(2+\sqrt{2}\right)^{2023}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{2023}\right)^2-2^{2024}\right)=\left(\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^{2023}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{2023}}{2^{1012}}\right)^2-1=$$

$$=k^2-1=(k-1)(k+1),$$

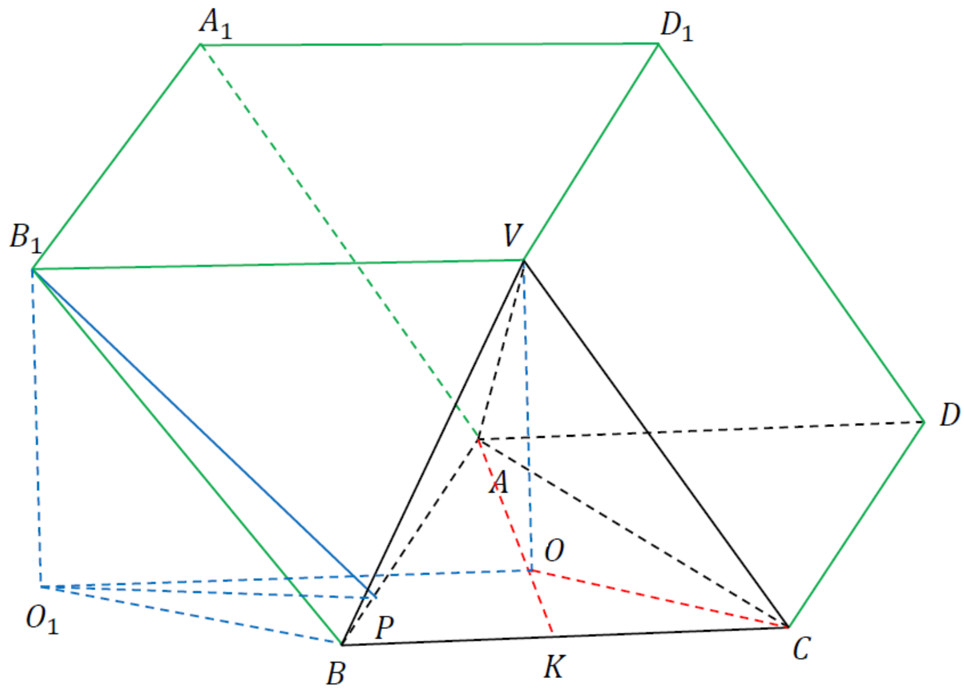
unde

$$k=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^{2023}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{2023}}{2^{1012}}=$$

$$=2^{1012}+C_{2023}^2\cdot 2^{1011}+C_{2023}^4\cdot 2^{1010}+\cdots+C_{2023}^{2s}\cdot 2^{1012-s}+\cdots+2\cdot 2023\ \in\mathbb{N}.$$

12.7. Baza piramidei $VABC$ este triunghiul isoscel ABC, în care $AB=AC=6\sqrt{2}$ cm și $BC=4\sqrt{6}$ cm. Muchiile laterale ale piramidei sunt de $\sqrt{51}$ cm. Determinați distanța dintre dreptele AB și VC.

Soluție. Fie O – proiecția vârfului V pe planul (ABC). Deoarece muchiile laterale sunt congruente, O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.



Fie $K \in BC$, astfel încât $AK \perp BC$. Atunci $AK = 4\sqrt{3}$ cm.
Fie $\alpha = m(\angle ABC)$. Atunci $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$.
Conform teoremei sinusurilor $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2OC$, ceea ce implică $OC = 3\sqrt{3}$ cm.
Construim $BB_1 \parallel VC$, $AA_1 \parallel VC$ și $AA_1 = BB_1 = VC$. Atunci $VC \parallel (ABB_1)$.
Distanța d dintre AB și VC este distanța dintre VC și ABB_1.
Construim paralelipipedul $ABCDA_1B_1VD_1$. Atunci distanța dintre VC și ABB_1 este lungimea înălțimii paralelipipedului $ABCDA_1B_1VD_1$ dusă din vârful V pe planul (ABB_1).

$$\mathcal{V}_{ABCDA_1B_1VD_1} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot VO, \mathcal{V}_{ABCDA_1B_1VD_1} = \mathcal{A}_{BB_1A_1A} \cdot d$$

implică

$$d = \frac{\mathcal{A}_{ABCD} \cdot VO}{\mathcal{A}_{BB_1A_1A}}.$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin\alpha = 48\sqrt{2}\ (\text{cm}^2).$$

Din triunghiul VOC calculăm $VO = 2\sqrt{6}$ cm.
Pentru a calcula $\mathcal{A}_{BB_1A_1A}$, considerăm $O_1 \in (ABC), B_1O_1 \perp (ABC)$. Atunci B_1VOO_1 – dreptunghi, iar O_1OCB – paralelogram și $O_1B = OC = 3\sqrt{3}$ cm.
Considerăm punctul $P \in (AB)$, astfel încât $O_1P \perp AB$. Atunci $B_1P \perp AB$.
Atunci din ΔO_1PB, $O_1P = O_1B \cdot \sin\beta$, unde $\beta = m(\angle O_1BP) = (180° - \alpha - m(\angle OCK)$.
În ΔOKC, calculăm $OK = AK - OA = \sqrt{3}$ (cm), $\sin(\angle OCK) = \frac{1}{3}$ și $\cos(\angle OCK) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Atunci $\sin\beta = \sin(\alpha + m(\angle OCK)) = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.
Obținem $O_1P = O_1B \cdot \sin\beta = 5$. În triunghiul dreptunghic B_1O_1P, calculăm

$$B_1P = \sqrt{B_1O_1^2 + O_1P^2} = 7\ (\text{cm}).$$

Atunci $\mathcal{A}_{BB_1A_1A} = AB \cdot B_1P = 42\sqrt{2}$ (cm^2), iar

$$d = \frac{48\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}}{42\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{6}}{7} \text{ (cm)}.$$

12.8. Determinați toate funcțiile derivabile $F: (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, pentru care: $F(1) = 1$ și $F\left(\frac{1}{x}\right) F'(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

Soluție. Fie $F'(x) = f(x)$. Atunci $\left(F\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Deoarece $F\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \frac{1}{x} \ln x$, obținem că $F(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = -x \ln x$. Înmulțind fiecare parte a ultimei egalități cu $-\frac{1}{x^2}$ obținem $-\frac{1}{x^2} F(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln x$ și, respectiv,

$$\left(F\left(\frac{1}{x}\right)\right)' F(x) = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) F(x) = -\frac{1}{x^2}(-x) \ln x = \frac{1}{x} \ln x. \qquad (1)$$

Obținem

$$F\left(\frac{1}{x}\right) F'(x) = f(x) F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln x. \qquad (2)$$

Adunând egalitățile (1) și (2) obținem $\left(F\left(\frac{1}{x}\right) F(x)\right)' = \left(F\left(\frac{1}{x}\right)\right)' F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) F'(x) = \frac{2}{x} \ln x$,

Atunci $F\left(\frac{1}{x}\right) F(x) = \ln^2 x + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Condiția $F(1) = 1$ implică $C_1 = 1$ și

$$F\left(\frac{1}{x}\right) F(x) = \ln^2 x + 1 \qquad (3)$$

Din $F\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \frac{1}{x} \ln x \Rightarrow f(1) = 0$ și $x = 1$ este unicul zerou al funcției f, iar F nu are zerouri.

Înmulțim $F\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ cu $F(x)$ și obținem $F(x) F\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \frac{1}{x} \ln x \cdot F(x)$, ceea ce implică $(\ln^2 x + 1) f(x) = \frac{1}{x} \ln x\, F(x) \Leftrightarrow (\ln^2 x + 1) F'(x) = \frac{1}{x} \ln x\, F(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} - \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} = 0 \Leftrightarrow \left(\ln|F(x)| - \ln\sqrt{\ln^2 x + 1}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\ln \frac{|F(x)|}{\sqrt{\ln^2 x + 1}}\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(x)}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} = \mathrm{C}_2 \Leftrightarrow F(x) = C_2\sqrt{\ln^2 x + 1}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Condiția $F(1) = 1$ implică $C_2 = 1$ și respectiv $F(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1}$.