OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a XII–a
Soluții

12.1. Calculați: $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos(4046x)}\,dx$.

Soluție. Utilizând periodicitatea funcției $f(t)=\cos t$, obținem

$$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos(4046x)}\,dx = \sqrt{2}\int_0^\pi |\cos(2023x)|dx = \left|\begin{array}{c} t = 2023x \\ dx = \frac{1}{2023}dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\pi \Rightarrow t = 2023\pi \end{array}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2023}\int_0^{2023\pi} |\cos t|dt =$$

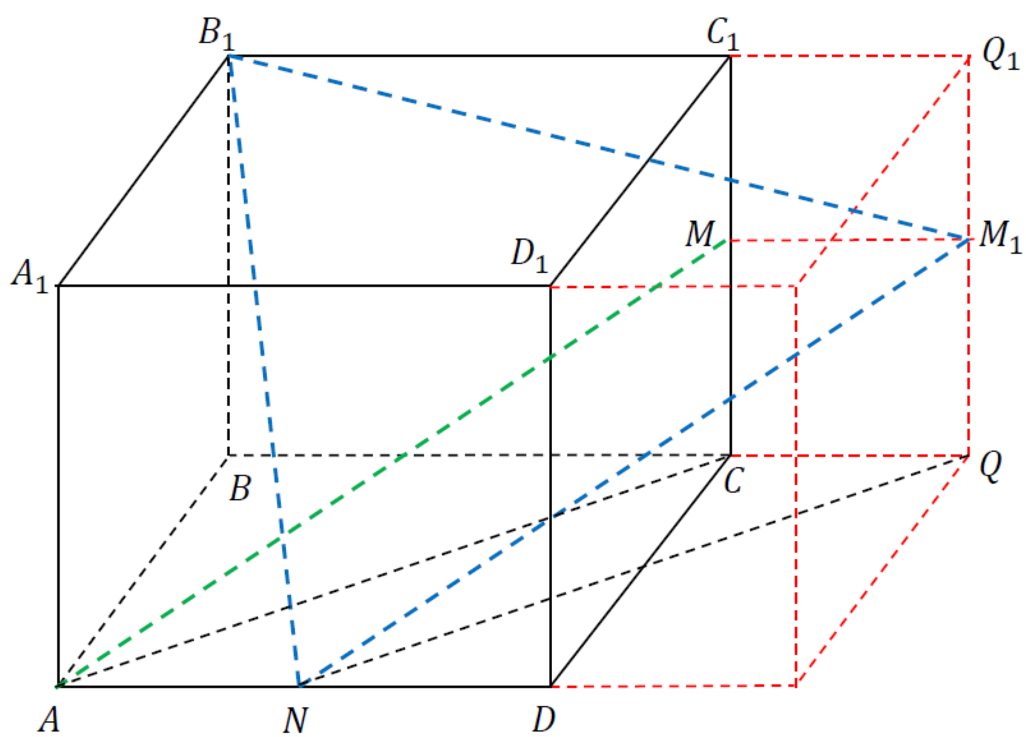
$$= \frac{\sqrt{2}}{2023}\left(\int_0^{2\pi} |\cos t|dt + \int_{2\pi}^{4\pi} |\cos t|dt + \cdots + \int_{2020\pi}^{2022\pi} |\cos t|dt + \int_{2022\pi}^{2023\pi} |\cos t|dt\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2023}\left(1011\int_0^{2\pi} |\cos t|dt + \int_{2022\pi}^{2023\pi} |\cos t|dt\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2023}\left(1011\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos t\,dt\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\,dt\right) = 2\sqrt{2}.$$

12.2. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$, în care $AB=a, BC=2a, AA_1=3a$. Pe muchiile CC_1 și AD se consideră punctele M și N respectiv, astfel încât $AN=C_1M=a$. Determinați măsura unghiului dintre dreptele AM și NB_1.

Soluție.



Pe dreapta suport a muchiei BC considerăm punctul Q, astfel încât $NQ \parallel AC$.
Considerăm punctul $Q_1 \in B_1C_1$, astfel încât $Q_1Q \parallel C_1C, Q_1Q = C_1C$, și punctul $M_1 \in Q_1Q$, astfel încât $Q_1M_1 = a$.
Atunci $AN \parallel CQ, CQ \parallel MM_1$ implică $AN \parallel MM_1$ și respectiv $AM \parallel NM_1$. Măsura unghiului dintre dreptele AM și NB_1 este egală cu măsura unghiului B_1NM_1.
Determinăm

$$B_1N^2 = AN^2 + AB^2 + BB_1^2 = a^2 + a^2 + 9a^2 = 11a^2,$$
$$NM_1^2 = AM^2 = AD^2 + DC^2 + CM^2 = 4a^2 + a^2 + 4a^2 = 9a^2,$$
$$B_1M_1^2 = B_1Q_1^2 + M_1Q_1^2 = 9a^2 + a^2 = 10a^2.$$

Conform teoremei cosinusurilor în triunghiul B_1NM_1 obținem
$B_1M_1^2 = B_1N^2 + NM_1^2 - 2B_1N \cdot NM_1 \cos\varphi$, unde $\varphi = m(\angle B_1NM_1)$.
Atunci $\cos\varphi = \frac{11a^2+9a^2-10\,a^2}{2a\sqrt{11}\cdot 3a} = \frac{5\sqrt{11}}{33}$ și $m(\angle B_1NM_1) = \arccos\frac{5\sqrt{11}}{33}$.

12.3. Fie numărul complex $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$. Arătați că valoarea raportului $\sqrt{3} \cdot \frac{\mathrm{Re}(z^{2024})}{\mathrm{Im}(z^{2024})}$ este un număr rațional.

Soluție 1. $z = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(2\sin^2\frac{\pi}{12} + 2i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right) =$

$$= \sin\frac{\pi}{12}\left(\sin\frac{\pi}{12} + i\,\cos\frac{\pi}{12}\right) = i\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

$$z^{2024} = \sin^{2024}\frac{\pi}{12}\left(\cos\left(-\frac{506\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{506\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sin^{2024}\frac{\pi}{12}\left(\cos\left(-168\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-168\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sin^{2024}\frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Atunci $\sqrt{3} \cdot \frac{\mathrm{Re}(z^{2024})}{\mathrm{Im}(z^{2024})} = \sqrt{3} \cdot \frac{-\frac{1}{2}\sin^{2024}\frac{\pi}{12}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^{2024}\frac{\pi}{12}} = 1 \in \mathbb{Q}$.

Soluție 2. Determinăm $|z| = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ și argumentul principal

$\varphi = \arccos\frac{Rez}{|z|} = \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{5\pi}{12}$. Scriem numărul complex z în forma trigonometrică:

$$z = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Atunci $z^{2024} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{2024}\left(\cos\frac{2530\pi}{3} + i\sin\frac{2530\pi}{3}\right) =$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{2024}\left(\cos\left(843\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(843\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{2024}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Atunci $\sqrt{3} \cdot \frac{\mathrm{Re}(z^{2024})}{\mathrm{Im}(z^{2024})} = \sqrt{3} \cdot \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{2024}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{2024}} = 1 \in \mathbb{Q}$.

12.4. Fie determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \cdots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \cdots & 1012^5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \ldots & 1012^{2023} \end{vmatrix}$.

Arătați că Δ este un număr divizibil prin numărul $1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot \ldots \cdot 2023!$.

Soluție. $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \cdots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \cdots & 1012^5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \ldots & 1012^{2023} \end{vmatrix} =$

$$= 1012!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & 1012^2 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & \cdots & 1012^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^{2022} & 2^{2022} & 3^{2022} & \ldots & 1012^{2022} \end{vmatrix} =$$

$$= 1012!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2^2-1 & 3^2-1 & \cdots & 1012^2-1 \\ 0 & 2^2(2^2-1) & 3^2(3^2-1) & \cdots & 1012^2(1012^2-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2^{2020}(2^2-1) & 3^{2020}(3^2-1) & \ldots & 1012^{2020}(1012^2-1) \end{vmatrix} =$$

$$= 1012!\begin{vmatrix} 2^2-1 & 3^2-1 & \ldots & 1012^2-1 \\ 2^2(2^2-1) & 3^2(3^2-1) & \ldots & 1012^2(1012^2-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{2020}(2^2-1) & 3^{2020}(3^2-1) & \ldots & 1012^{2020}(1012^2-1) \end{vmatrix} =$$

$$= 1012!\,(2^2-1^2)(3^2-1^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-1^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2^2 & 3^2 & \ldots & 1012^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{2020} & 3^{2020} & \ldots & 1012^{2020} \end{vmatrix} =$$

$$= 1012!\,(2^2-1^2)(3^2-1^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-1^2)\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 3^2-2^2 & \ldots & 1012^2-2^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 3^{2018}(3^2-2^2) & \ldots & 1012^{2018}(1012^2-2^2) \end{vmatrix} =$$

$$= 1012!\,(2^2-1^2)(3^2-1^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-1^2)\cdot$$

$$\cdot(3^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-2^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 3^2 & 4^2 & \ldots & 1012^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{2018} & 4^{2018} & \ldots & 1012^{2018} \end{vmatrix} =$$

$$= \cdots = 1012!\,(2^2-1^2)(3^2-1^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-1^2)\cdot$$

$$(3^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-2^2)\cdot$$

$$(4^2-3^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-3^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1011^2 & 1012^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1012!\,(2^2-1^2)(3^2-1^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-1^2)\cdot$$

$$(3^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-2^2)\cdot$$

$$(4^2-3^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-3^2)\cdot$$

$$\cdot(1012^2-1011^2).$$

Ținând cont de faptul că

$$(k^2-1)(k^2-2^2)(k^2-3^2)\cdot\ldots\cdot(k^2-(k-1)^2) =$$

$$= (k-1)(k-2)(k-3)\cdot\ldots\cdot 1\cdot(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\ldots\cdot(2k-1) = \frac{(2k-1)!}{k},$$

scriem $\Delta = 1012!\cdot\frac{3!}{2}\cdot\frac{5!}{3}\cdot\frac{7!}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2023!}{1012} = 1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 2023!$.