

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 5 марта 2023 г., XII класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

12.5. Дана функция $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(a) = \int_{-a}^a \frac{dx}{(e^x+1)(x +a)}$. Покажите, что I есть константная функция.		
Решение со схемой распределения баллов		
	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $I(a) = \int_{-a}^a \frac{e^t dt}{(e^t+1)(t +a)}$	3 балла
2.	Получение $I(a) = \int_{-a}^a \frac{dt}{ t +a} - I(a)$	2 балла
3.	Вычисление значения интеграла $\int_{-a}^a \frac{dt}{ t +a}$ и получение правильного ответа	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

12.6. Пусть $(3 + \sqrt{8})^{2023} = a + b\sqrt{8}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Покажите, что a есть произведение двух натуральных чисел, с разностью 2.		
Решение со схемой распределения баллов		
	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение с \bar{a} $(3 - \sqrt{8})^{2023} = a - b\sqrt{8}$, $a, b \in \mathbb{N}$	1 балл
2.	Получение $a = \frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{8})^{2023} + (3 - \sqrt{8})^{2023} \right)$	1 балл
3.	Получение $a = \frac{1}{2^{2024}} \left((2 + \sqrt{2})^{4046} + (2 - \sqrt{2})^{4046} \right)$	2 балла
4.	Получение $a = \left(\frac{(2+\sqrt{2})^{2023} + (2-\sqrt{2})^{2023}}{2^{1012}} \right)^2 - 1$	2 балла
5.	Аргументирование, что $\frac{(2+\sqrt{2})^{2023} + (2-\sqrt{2})^{2023}}{2^{1012}} \in \mathbb{N}$ и запись a как произведение двух натуральных чисел	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.7. Основанием пирамиды $VABC$ есть равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = AC = 6\sqrt{2}$ см и $BC = 4\sqrt{6}$ см. Боковые рёбра пирамиды равны $\sqrt{51}$ см. Найдите расстояние между прямыми AB и VC .

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$, где $\alpha = m(\angle ABC)$	1 балл
2.	Получение $OC = 3\sqrt{3}$ см, где – проекция вершины V на плоскость ABC	1 балл
3.	Построение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 V D_1$, где $BB_1 \parallel VC$, $AA_1 \parallel VC$ и $AA_1 = BB_1 = VC$	1 балл
4.	Получение $d = \frac{\mathcal{A}_{ABCD} \cdot VO}{\mathcal{A}_{BB_1 A_1 A}}$	1 балл
5.	Получение $VO = 2\sqrt{6}$ см	1 балл
6.	Получение $\sin(\angle O_1 BP) = 5$	1 балл
7.	Получение $\mathcal{A}_{BB_1 A_1 A} = 42\sqrt{2}$ (см ²) и вычисление значения d	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.8. Найдите все дифференцируемые функции $F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которых: $F(1) = 1$ и $F\left(\frac{1}{x}\right) F'(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $\left(F\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$, где $F'(x) = f(x)$	1 балл
2.	Получение $\left(F\left(\frac{1}{x}\right) F(x)\right)' = \frac{2}{x} \ln x$	2 балла
3.	Получение $F\left(\frac{1}{x}\right) F(x) = \ln^2 x + 1$	1 балл
4.	Получение $F(x) = C_2 \sqrt{\ln^2 x + 1}$, $C_2 \in \mathbb{R}$	2 балла
5.	Получение $F(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов