РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 4 марта 2023 г., XII класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

12.1. Вычислите: $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(4046x)}\, dx$.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(4046x)}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \lvert\cos(2023x)\rvert dx =$	1 балл
2.	$= \left\lvert \begin{matrix} t = 2023x \\ dx = \dfrac{1}{2023}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \pi \Rightarrow t = 2023\pi \end{matrix} \right\rvert = \dfrac{\sqrt{2}}{2023}\int\limits_0^{2023\pi} \lvert\cos t\rvert dt$	1 балл
3.	$= \dfrac{\sqrt{2}}{2023}\left(\int\limits_0^{2\pi} \lvert\cos t\rvert dt + \int\limits_{2\pi}^{4\pi} \lvert\cos t\rvert dt + \cdots + \int\limits_{2020\pi}^{2022\pi} \lvert\cos t\rvert dt + \int\limits_{2022\pi}^{2023\pi} \lvert\cos t\rvert dt\right)$ $=$	1 балл
4.	$\int\limits_0^{2\pi} \lvert\cos t\rvert dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t\, dt + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos t\, dt = 4$	2 балла
5.	$\int\limits_{2022\pi}^{2023\pi} \lvert\cos t\rvert dt = 2$	1 балл
6.	Вычисление значения заданного интеграла	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = a,\ BC = 2a$, $AA_1 = 3a$. На рёбрах CC_1и AD берутся точки M и N соответственно так, что $AN = C_1M = a$. Найдите величину угла между прямыми AM и NB_1.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Построение треугольника B_1NM_1, где $AM \parallel NM_1$	2 балла
2.	Получение $B_1N^2 = 11a^2, NM_1^2 = 9a^2, B_1M_1^2 = 10a^2$	3 балла
3.	Запись теоремы косинусов в треугольнике B_1NM_1и получение $\cos\varphi = \frac{11a^2+9a^2-10\,a^2}{2a\sqrt{11}\cdot 3a} = \frac{5\sqrt{11}}{33}$ и соответственно	2 балла

	$m(\angle B_1NM_1) = \arccos\frac{5\sqrt{11}}{33}$	
	Общее количество баллов	7 баллов

12.3. Дано комплексное число $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$. Покажите, что значение отношения $\sqrt{3}\cdot\frac{\mathrm{Re}(z^{2024})}{\mathrm{Im}(z^{2024})}$ есть рациональное число.		
Решение со схемой распределения баллов		
	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $= i\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ или $z = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$	3 балла
2.	Получение $z^{2024} = \sin^{2024}\frac{\pi}{12}\left(\cos\left(-\frac{506\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{506\pi}{3}\right)\right)$ или $z^{2024} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{2024}\left(\cos\frac{2530\pi}{3} + i\sin\frac{2530\pi}{3}\right)$	1 балл
3.	Получение $z^{2024} = \sin^{2024}\frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ или $z = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^{2024}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	2 балла
4.	Нахождение $\sqrt{3}\cdot\frac{\mathrm{Re}(z^{2024})}{\mathrm{Im}(z^{2024})} = 1$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.4. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \cdots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \cdots & 1012^5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \cdots & 1012^{2023} \end{vmatrix}$. Покажите, что Δ есть число, делящееся на число $1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot \ldots \cdot 2023!$.		
Решение со схемой распределения баллов		
	Этапы решения	Количество баллов
1.	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \cdots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \cdots & 1012^5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \cdots & 1012^{2023} \end{vmatrix} =$ $= 1012!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & 1012^2 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & \cdots & 1012^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^{2022} & 2^{2022} & 3^{2022} & \cdots & 1012^{2022} \end{vmatrix} =$	1 балл

2.	$= 1012!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2^2-1 & 3^2-1 & \cdots & 1012^2-1 \\ 0 & 2^2(2^2-1) & 3^2(3^2-1) & \cdots & 1012^2(1012^2-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2^{2020}(2^2-1) & 3^{2020}(3^2-1) & \cdots & 1012^{2020}(1012^2-1) \end{vmatrix} =$	1 балл
3.	$= 1012!\,(2^2-1^2)(3^2-1^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-1^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & 1012^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{2020} & 3^{2020} & \cdots & 1012^{2020} \end{vmatrix}$	1 балл
4.	$= 1012!\,(2^2-1^2)(3^2-1^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-1^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 3^2-2^2 & \cdots & 1012^2-2^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 3^{2018}(3^2-2^2) & \cdots & 1012^{2018}(1012^2-2^2) \end{vmatrix} =$	1 балл
5.	$= 1012!\,(2^2-1^2)(3^2-1^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-1^2)\cdot(3^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-2^2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3^2 & 4^2 & \cdots & 1012^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3^{2018} & 4^{2018} & \cdots & 1012^{2018} \end{vmatrix} =$	1 балл
6.	Получение $\Delta = 1012!\,(2^2-1^2)(3^2-1^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-1^2)\cdot(3^2-2^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-2^2)\cdot(4^2-3^2)\cdot\ldots\cdot(1012^2-3^2)\cdot\cdot(1012^2-1011^2)$.	1 балл
7.	Получение $\Delta = 1012!\cdot\frac{3!}{2}\cdot\frac{5!}{3}\cdot\frac{7!}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2023!}{1012} = 1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 2023!$ и вывод	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов