

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Ziua a doua, 5 martie 2023, Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

12.5. Fie funcția $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $I(a) = \int_{-a}^a \frac{dx}{(e^x+1)(x +a)}$. Arătați că I este o funcție constantă.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $I(a) = \int_{-a}^a \frac{e^t dt}{(e^t+1)(t +a)}$	3 puncte
2.	Obținerea $I(a) = \int_{-a}^a \frac{dt}{ t +a} - I(a)$	2 puncte
3.	Calcularea valorii integralei $\int_{-a}^a \frac{dt}{ t +a}$ și obținerea răspunsului corect	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

12.6. Fie $(3 + \sqrt{8})^{2023} = a + b\sqrt{8}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Arătați că a este produsul a două numere naturale, a căror diferență este egală cu 2.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea că $(3 - \sqrt{8})^{2023} = a - b\sqrt{8}$, $a, b \in \mathbb{N}$	1 punct
2.	Obținerea $a = \frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{8})^{2023} + (3 - \sqrt{8})^{2023} \right)$	1 punct
3.	Obținerea $a = \frac{1}{2^{2024}} \left((2 + \sqrt{2})^{4046} + (2 - \sqrt{2})^{4046} \right)$	2 puncte
4.	Obținerea $a = \left(\frac{(2+\sqrt{2})^{2023} + (2-\sqrt{2})^{2023}}{2^{1012}} \right)^2 - 1$	2 puncte
5.	Argumentarea că $\frac{(2+\sqrt{2})^{2023} + (2-\sqrt{2})^{2023}}{2^{1012}} \in \mathbb{N}$ și scrierea lui a ca produs de două numere naturale	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.7. Baza piramidei $VABC$ este triunghiul isoscel ABC , în care $AB = AC = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = 4\sqrt{6}$ cm. Muchiile laterale ale piramidei sunt de $\sqrt{51}$ cm. Determinați distanța dintre dreptele AB și VC .

Rezolvare cu barem de evaluare

	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$, unde $\alpha = m(\angle ABC)$	1 punct
2.	Obținerea $OC = 3\sqrt{3}$ cm, unde – proiecția vârfului V pe planul ABC	1 punct
3.	Construirea paralelipipedului $ABCD A_1 B_1 V D_1$, unde $BB_1 \parallel VC$, $AA_1 \parallel VC$ și $AA_1 = BB_1 = VC$	1 punct
4.	Obținerea $d = \frac{\mathcal{A}_{ABCD} \cdot VO}{\mathcal{A}_{BB_1 A_1 A}}$	1 punct
5.	Obținerea $VO = 2\sqrt{6}$ cm	1 punct
6.	Obținerea $\sin(\angle O_1 BP) = 5$	1 punct
7.	Obținerea $\mathcal{A}_{BB_1 A_1 A} = 42\sqrt{2}$ (cm ²) și calcularea valorii lui d	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.8. Determinați toate funcțiile derivabile $F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care:

$$F(1) = 1 \text{ și } F\left(\frac{1}{x}\right) F'(x) = \frac{1}{x} \ln x.$$

Rezolvare cu barem de evaluare

	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $\left(F\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$, unde $F'(x) = f(x)$	1 punct
2.	Obținerea $\left(F\left(\frac{1}{x}\right) F(x)\right)' = \frac{2}{x} \ln x$	2 puncte
3.	Obținerea $F\left(\frac{1}{x}\right) F(x) = \ln^2 x + 1$	1 punct
4.	Obținerea $F(x) = C_2 \sqrt{\ln^2 x + 1}$, $C_2 \in \mathbb{R}$	2 puncte
6.	Obținerea $F(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte