

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

12.1. Calculați: $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos(4046x)} dx$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos(4046x)} dx = \sqrt{2} \int_0^\pi \cos(2023x) dx =$	1 punct
2.	$= \left \begin{array}{l} t = 2023x \\ dx = \frac{1}{2023} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \pi \Rightarrow t = 2023\pi \end{array} \right = \frac{\sqrt{2}}{2023} \int_0^{2023\pi} \cos t dt$	1 punct
3.	$= \frac{\sqrt{2}}{2023} \left(\int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \cos t dt + \dots + \int_{2020\pi}^{2022\pi} \cos t dt + \int_{2022\pi}^{2023\pi} \cos t dt \right) =$	1 punct
4.	$\int_0^{2\pi} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos t dt = 4$	2 puncte
5.	$\int_{2022\pi}^{2023\pi} \cos t dt = 2$	1 puncte
6.	Calcularea valorii integralei	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.2. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, în care $AB = a, BC = 2a, AA_1 = 3a$. Pe muchiile CC_1 și AD se consideră punctele M și N respectiv, astfel încât $AN = C_1M = a$. Determinați măsura unghiului dintre dreptele AM și NB_1 .		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Construirea triunghiului B_1NM_1 , unde $AM \parallel NM_1$	2 puncte
2.	Obținerea $B_1N^2 = 11a^2, NM_1^2 = 9a^2, B_1M_1^2 = 10a^2$	3 puncte
3.	Scrierea teoremei cosinusurilor în triunghiul B_1NM_1 și obținerea $\cos \varphi = \frac{11a^2 + 9a^2 - 10a^2}{2a\sqrt{11} \cdot 3a} = \frac{5\sqrt{11}}{33}$ și respectiv $m(\angle B_1NM_1) = \arccos \frac{5\sqrt{11}}{33}$	2 puncte

	Punctaj total	7 puncte
--	---------------	----------

12.3. Fie numărul complex $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$. Arătați că valoarea raportului $\sqrt{3} \cdot \frac{\operatorname{Re}(z^{2024})}{\operatorname{Im}(z^{2024})}$ este un număr rațional.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $z = i \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right)$ sau $z = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$	3 puncte
2.	Obținerea $z^{2024} = \sin^{2024} \frac{\pi}{12} \left(\cos \left(-\frac{506\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{506\pi}{3} \right) \right)$ sau $z^{2024} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right)^{2024} \left(\cos \frac{2530\pi}{3} + i \sin \frac{2530\pi}{3} \right)$	1 punct
3.	Obținerea $z^{2024} = \sin^{2024} \frac{\pi}{12} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ sau $z = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \right)^{2024} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$	2 puncte
4.	Determinarea $\sqrt{3} \cdot \frac{\operatorname{Re}(z^{2024})}{\operatorname{Im}(z^{2024})} = 1$	1 punct
Punctaj total		7 puncte

12.4. Fie determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \dots & 1012^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \dots & 1012^{2023} \end{vmatrix}$.		
Arătați că Δ este un număr divizibil prin numărul $1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 2023!$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 1012 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & 1012^3 \\ 1^5 & 2^5 & 3^5 & \dots & 1012^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{2023} & 2^{2023} & 3^{2023} & \dots & 1012^{2023} \end{vmatrix} =$ $= 1012! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & 1012^2 \\ 1^4 & 2^4 & 3^4 & \dots & 1012^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{2022} & 2^{2022} & 3^{2022} & \dots & 1012^{2022} \end{vmatrix} =$	1 punct
2.	$= 1012! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2^2 - 1 & 3^2 - 1 & \dots & 1012^2 - 1 \\ 0 & 2^2(2^2 - 1) & 3^2(3^2 - 1) & \dots & 1012^2(1012^2 - 1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2^{2020}(2^2 - 1) & 3^{2020}(3^2 - 1) & \dots & 1012^{2020}(1012^2 - 1) \end{vmatrix} =$	1 punct
3.		1 punct

	$= 1012! (2^2 - 1^2)(3^2 - 1^2) \cdot \dots \cdot (1012^2 - 1^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & 1012^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2^{2020} & 3^{2020} & \dots & 1012^{2020} \end{vmatrix}$	
4.	$= 1012! (2^2 - 1^2)(3^2 - 1^2) \cdot \dots \cdot (1012^2 - 1^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 3^2 - 2^2 & \dots & 1012^2 - 2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 3^{2018}(3^2 - 2^2) & \dots & 1012^{2018}(1012^2 - 2^2) \end{vmatrix} =$	1 punct
5.	$= 1012! (2^2 - 1^2)(3^2 - 1^2) \cdot \dots \cdot (1012^2 - 1^2) \cdot (3^2 - 2^2) \cdot \dots \cdot (1012^2 - 2^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3^2 & 4^2 & \dots & 1012^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3^{2018} & 4^{2018} & \dots & 1012^{2018} \end{vmatrix} =$	1 punct
6.	Obținerea $\Delta = 1012! (2^2 - 1^2)(3^2 - 1^2) \cdot \dots \cdot (1012^2 - 1^2) \cdot (3^2 - 2^2) \cdot \dots \cdot (1012^2 - 2^2) \cdot (4^2 - 3^2) \cdot \dots \cdot (1012^2 - 3^2) \cdot (1012^2 - 1011^2)$	1 punct
7.	Obținerea $\Delta = 1012! \cdot \frac{3!}{2} \cdot \frac{5!}{3} \cdot \frac{7!}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2023!}{1012} = 1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 2023!$ și concluzia	1 punct
	Punctaj total	7 puncte