

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 5 марта 2023 г., XI класс

11.5. Последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ определена следующим образом:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2023}, \quad n \in \mathbf{N}$$

Докажите, что последовательность сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

11.6. Решите уравнение

$$\cos 2x - \sin 2x + 2 \cos x + 1 = 0.$$

11.7. Пусть положительные действительные числа a, b, c таковы, что полином

$$P(X) = X^3 - 3aX^2 + 3b^2X - c^3$$

имеет три положительных различных корня. Докажите, что $a > b > c$.

11.8. Найти все непрерывные функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, которые удовлетворяют соотношению

$$3 \cdot f(2x + 1) = f(x) + 5x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!