

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Первый день, 4 марта 2023 г., XI класс

11.1. Сравните периметр квадрата с длиной окружности, которая проходит через середину одной из сторон квадрата и через вершины параллельной ей стороны. Аргументировать ответ.

11.2. Пусть положительные действительные числа a_1, \dots, a_n ($n \in \mathbf{N}$) таковы, что $a_1 + \dots + a_n < 1$. Доказать неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot \frac{(1 - a_1) \cdot \dots \cdot (1 - a_n)}{1 - a_1 - \dots - a_n} \geq n^{n+1}.$$

11.3. Для любого натурального числа m обозначим через $S(m)$ сумму цифр числа m . Вычислить $S(S(S(2023^{2023})))$.

11.4. Пусть функция $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ является дифференцируемой и строго убывающей, причем $f(0) = 1$ и $f'(0) = -1$. Пусть последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ определена следующим образом: $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n f(a_n)$, $\forall n \geq 1$. Покажите, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (n a_n)$ и вычислите его значение.

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!