

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a XI-a

11.1. Comparați perimetrul unui pătrat cu lungimea cercului trasat prin mijlocul unei laturi și vârfurile laturii paralele. Argumentați răspunsul.

11.2. Fie numerele reale pozitive a_1, \dots, a_n ($n \in \mathbf{N}$), astfel încât $a_1 + \dots + a_n < 1$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} \cdot \frac{(1 - a_1) \cdots (1 - a_n)}{1 - a_1 - \dots - a_n} \geq n^{n+1}.$$

11.3. Pentru orice număr natural m notăm cu $S(m)$ suma cifrelor numărului m . Calculați $S(S(S(2023^{2023})))$.

11.4. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ derivabilă, strict descrescătoare, cu $f(0) = 1$ și $f'(0) = -1$. Fie șirul $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, definit prin: $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n f(a_n)$, $\forall n \geq 1$. Arătați că există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n)$ și calculați această limită.

Timp de lucru: 240 de minute.

Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !