РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 5 марта 2023 г., XI класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

11.5. Последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ определена следующим образом:

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2023},\ n \in \mathbf{N}$$

Докажите, что последовательность сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Доказательство того факта, что $x_n \in (0; 1],\, n \in \mathbf{N}$	2 балла
2.	Демонстрация неравенства $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \forall n \in \mathbf{N}$.	1 балл
3.	Вывод факта, что последовательность $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ строго убывает и ограничена снизу	1 балл
4.	Доказательство сходимости последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$	1 балл
5.	Вычисление значения предела последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

11.6. Решите уравнение

$$\cos 2x - \sin 2x + 2\cos x + 1 = 0.$$

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Использование тригонометрических формул для двойного угла	1 балл
2.	Получение следующих двух уравнений: $\sin x - 1 = 0$ и $sin\, x + cos\, x + 1 = 0$	1 балл
3.	Решение уравнения $\sin x - 1 = 0$	1 балл
4.	Переход в уравнении $sin\, x + cos\, x + 1 = 0$ к половинному углу аргумента x (или использование формулы для $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$)	1 балл
5.	Получение следующих двух уравнений: $\cos\frac{x}{2} = 0$ и $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = -1$ (или одного уравнения $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)	1 балл
6.	Решение полученных уравнений и запись всех решений	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

11.7. Пусть положительные действительные числа a, b, c таковы, что полином

$$P(X) = X^3 - 3aX^2 + 3b^2X - c^3$$

имеет три положительных различных корня. Докажите, что $a > b > c$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Запись соотношений теоремы Виета: $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = c^3$ и $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 3b^2$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ есть действительные положительные различные корни полинома $P(X)$	1 балл
2.	Демонстрация того, что числа $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_3$ являются действительными положительными и различными числами	1 балл
3.	Применение неравенства о средних и получение неравенства $b > c$	1 балл
4.	Вычисление производной полинома $P(x)$: $P^{'}(x) = 3(x^2 - 2ax + b^2)$	1 балл
5.	Вывод утверждения о том, что корни β_1, β_2 полинома $P^{'}(X)$ также являются действительными положительными и различными числами	1 балл
6.	Запись соотношений теоремы Виета: $\beta_1\beta_2 = b^2$ и $\beta_1 + \beta_2 = 2a$	1 балл
7.	Применение неравенства о средних и получение неравенства $a > b$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

11.8. Найти все непрерывные функции $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, которые удовлетворяют соотношению

$$3 \cdot f(2x+1) = f(x) + 5x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Решение задачи в классе функций первой степени и получение решения $f_1(x) = x - \frac{3}{2}$.	1 балл
2.	Рассмотрение функции $g(x) = f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right)$, где функция $f(x)$ – решение исходной задачи.	1 балл
3.	Демонстрация равенства $3 \cdot g(2x+1) = g(x)\ \ \forall x \in \mathbf{R}$	1 балл
4.	Демонстрация равенства $g(x) = \frac{1}{3} \cdot g\left(\frac{x-1}{2}\right)\ \ \forall x \in \mathbf{R}$	1 балл
5.	Демонстрация равенства $g(x) = \frac{1}{3^n} \cdot g\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right),\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^*$	1 балл
6.	Вывод значения предела $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right) = g(-1)$	1 балл
7.	Доказательство того, что $g(x) = 0\ \ \forall x \in \mathbf{R}$ и вывод о единственности решения $f_1(x) = x - \frac{3}{2}$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов