РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 4 марта 2023 г., XI класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

11.1. Сравните периметр квадрата с длиной окружности, которая проходит через середину одной из сторон квадрата и через вершины параллельной ей стороны. Аргументировать ответ.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Описание геометрической конструкции. Получение треугольника OND и обоснование того, что он является прямоугольным треугольником.	1 балл
2.	Получение равенств $ON = a - r$, $ND = \frac{a}{2}$, $OD = r$	1 балл
3.	Применение теоремы Пифагора и получение уравнения $r^2 = (a-r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	1 балл
4.	Решение уравнения и получение корня $r = \frac{5a}{8}$	1 балл
5.	Вычисление длины окружности $2\pi r = \frac{5\pi a}{4}$	1 балл
6.	Определение периметра квадрата $4a$	1 балл
7.	Сравнение длины окружности и периметра квадрата ($2\pi r = \frac{5\pi a}{4} < \frac{5\cdot 3{,}2\cdot a}{4} = 4a$)	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

11.2. Пусть положительные действительные числа $a_1, \cdots, a_n$ ($n \in \mathbf{N}$) таковы, что $a_1 + \cdots + a_n < 1$. Доказать неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \cdot \frac{(1-a_1)\cdot \cdots \cdot (1-a_n)}{1 - a_1 - \cdots - a_n} \geq n^{n+1}.$$

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Обозначение $a_{n+1} = 1 - (a_1 + \cdots + a_n)$ и демонстрация того, что $a_{n+1} > 0$	1
2	Перезапись доказываемого неравенства в виде $$\frac{(1-a_{n+1})\cdot(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \cdots \cdot (1-a_n)}{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \geq n^{n+1}$$	1
3	Исследование выражения $1 - a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_{n+1}$ и демонстрация того, что $1 - a_i > 0$	1
4	Использование неравенства о средних (для любых $i, 1 \leq i \leq n+1$) и получение неравенства $1 - a_i \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdot \cdots \cdot a_{n+1}}$	1

5	Рассмотрение произведения $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n+1}$ и перезапись неравенств в виде $1 - a_i \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{P}{a_i}}$, для любых $i, 1 \leq i \leq n+1$.	1
6	Получение неравенства $$(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \dots \cdot(1-a_{n+1}) \geq n^{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{P}{a_1}\cdot\frac{P}{a_2}\cdot \ldots \cdot \frac{P}{a_{n+1}}}$$	1
7	Получение неравенства $$\frac{(1-a_{n+1})\cdot(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \dots \cdot(1-a_n)}{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \geq n^{n+1}$$	1
	Общее количество баллов	7 баллов

11.3. Для любого натурального числа m обозначим через $S(m)$ сумму цифр числа m. Вычислить $S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right)$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Оценка числа цифр $N(2023^{2023}) \leq M$, для какого-то $M \leq 88888888$ (в частности, для $M = 8092$)	1 балл
2.	Оценка первой суммы: $S(2023^{2023}) \leq 9M$ (в частности, $9M = 72828$)	1 балл
3.	Получение оценки второй суммы $S\left(S(2023^{2023})\right) \leq k$, для какого-то $k \leq 78$ (в частности, $k = 43$)	1 балл
4.	Получение оценки третьей суммы $S(S\left(S(2023^{2023})\right)) \leq p$, для какого-то $p \leq 15$ (в частности, $p = 13$)	1 балл
5.	Доказательство того, что $2023^{2023} \equiv 7 (mod\, 9)$	1 балл
6.	Доказательство того, что $S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right) \equiv 7 (mod\, 9)$	1 балл
7.	Вывод о том что $S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right) = 7$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

11.4. Пусть функция $f: \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ является дифференцируемой и строго убывающей, причем $f(0) = 1$ и $f'(0) = -1$. Пусть последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ определена следующим образом: $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n f(a_n)$, $\forall n \geq 1$. Покажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)$ и вычислите его значение.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов

1.	Доказательство того, что последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу числом 0.	1 балл
2.	Доказательство того, что последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ строго убывает.	1 балл
3.	Доказательство того, что последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся и $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.	1 балл
4.	Применение леммы Cezaro-Stolz и получение рав-ва $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{na_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right)$.	1 балл
5.	Получение равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{na_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-f(a_n)}{a_n f(a_n)}$	1 балл
6.	Получение равенства $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-f(x)}{x\cdot f(x)}\right) = 1$.	1 балл
7.	Вывод равенства $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n) = 1$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов