Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 5 martie 2023, Clasa a XI–a
Barem de evaluare

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

11.5. Șirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este definit prin:

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2023},\ n \in \mathbf{N}.$$

Demonstrați că șirul este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Demonstrarea faptului că $x_n \in (0; 1]$, $n \in \mathbf{N}$	2
2	Demonstrarea inegalității $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \forall n \in \mathbf{N}$.	1
3	Deducerea faptului că șirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este strict descrescător și mărginit inferior	1
4	Concluzionarea faptului că șirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este convergent	1
5	Obținerea ecuației $L = L - \frac{L^2}{2023}$ pentru limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ a șirului $(x_n)_{n=0}^{\infty}$	1
6	Calcularea limitei șirului $(x_n)_{n=0}^{\infty}$	1
	Punctaj total	**7 puncte**

11.6. Rezolvați ecuația $\cos 2x - \sin 2x + 2\cos x + 1 = 0$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Utilizarea formulelor trigonometrice pentru unghiul dublu	1
2	Obținerea celor două ecuații: $\sin x - 1 = 0$ și $\sin x + \cos x + 1 = 0$	1
3	Soluționarea ecuației $\sin x - 1 = 0$	1
4	Trecerea în ecuația $\sin x + \cos x + 1 = 0$ la jumătatea unghiului x (sau utilizarea formulei pentru $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$)	1
5	Obținerea celor două ecuații $\cos\frac{x}{2} = 0$ și $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$ (sau o singură ecuație $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)	1
6	Soluționarea ecuațiilor obținute și scrierea tuturor soluțiilor	2
	Punctaj total	**7 puncte**

11.7. Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât polinomul $$P(X) = X^3 - 3aX^2 + 3b^2X - c^3$$ are trei rădăcini reale, pozitive și distincte. Arătați că $a > b > c$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Scrierea relațiilor lui Viète $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = c^3$ și $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 3b^2$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sunt rădăcinile reale, pozitive și distincte ale polinomului $P(X)$	1
2	Menționarea faptului că numerele $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_3$ sunt reale, pozitive și distincte	1
3	Aplicarea inegalității mediilor și obținerea inegalității $b > c$	1
4	Calcularea derivatei funcției polinomiale $P(x)$: $P'(x) = 3(x^2 - 2ax + b^2)$	1
5	Concluzionarea faptului că rădăcinile β_1, β_2 ale polinomului $P'(X)$ sunt, la fel, reale, pozitive și distincte	1
6	Scrierea relațiilor lui Viète: $\beta_1\beta_2 = b^2$ și $\beta_1 + \beta_2 = 2a$	1
7	Aplicarea inegalității mediilor și obținerea inegalității $a > b$	1
	Punctaj total	**7 puncte**

11.8. Găsiți toate funcțiile continue $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care verifică relația $$3 \cdot f(2x+1) = f(x) + 5x, \ \ \forall x \in \mathbf{R}.$$		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Căutarea soluțiilor în clasa funcțiilor de gradul întâi	1
2	Obținerea soluției $f_1(x) = x - \frac{3}{2}$	1
3	Considerarea funcției $g(x) = f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right)$, unde $f(x)$ este o soluție a problemei date. Demonstrarea relației $3 \cdot g(2x+1) = g(x)\ \ \forall x \in \mathbf{R}$	1
4	Demonstrarea relației $g(x) = \frac{1}{3} \cdot g\left(\frac{x-1}{2}\right)\ \ \forall x \in \mathbf{R}$	1
5	Demonstrarea relației $g(x) = \frac{1}{3^n} \cdot g\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right),\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}^*$	1
6	Calcularea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right) = g(-1)$	1
7	Demonstrarea faptului că $g(x) = 0\ \ \forall x \in \mathbf{R}$ și concluzionarea unicității soluției $f_1(x) = x - \frac{3}{2}$.	1
	Punctaj total	**7 puncte**