Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a XI–a
Barem de evaluare

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

11.1. Comparați perimetrul unui pătrat cu lungimea cercului trasat prin mijlocul unei laturi și vârfurile laturii paralele. Argumentați răspunsul.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Descrierea construcției geometrice. Obținerea triunghiului OND și argumentarea faptului că el este dreptunghic	1
2	Obținerea egalităților $ON = a - r$, $ND = \frac{a}{2}$, $OD = r$	1
3	Aplicarea teoremei lui Pitagora și obținerea ecuației $r^2 = (a-r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	1
4	Soluționarea ecuației și determinarea soluției $r = \frac{5a}{8}$	1
5	Calcularea lungimii cercului $2\pi r = \frac{5\pi a}{4}$	1
6	Determinarea perimetrului pătratului $4a$	1
7	Compararea lungimii cercului cu perimetrul pătratului ($2\pi r = \frac{5\pi a}{4} < \frac{5\cdot 3{,}2\cdot a}{4} = 4a$)	1
	Punctaj total	**7 puncte**

11.2. Fie numerele reale pozitive $a_1, \cdots, a_n$ $(n \in \mathbf{N})$, astfel încât $a_1 + \cdots + a_n < 1$. Demonstrați inegalitatea
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \cdot \frac{(1-a_1)\cdot \cdots \cdot (1-a_n)}{1 - a_1 - \cdots - a_n} \geq n^{n+1}.$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Notarea $a_{n+1} = 1 - (a_1 + \cdots + a_n)$ și menționarea faptului că $a_{n+1} > 0$	1
2	Rescrierea inegalității în forma $$\frac{(1-a_{n+1})\cdot(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \cdots \cdot (1-a_n)}{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \geq n^{n+1}$$	1
3	Cercetarea expresiei $1 - a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_{n+1}$ și menționarea faptului că $1 - a_i > 0$	1
4	Utilizarea inegalității mediilor (pentru orice $i, 1 \leq i \leq n+1$) și obținerea inegalității $1 - a_i \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdot \cdots \cdot a_{n+1}}$	1

5	Considerarea produsului $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n+1}$ și rescrierea inegalităților în forma $1 - a_i \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{P}{a_i}}$, pentru orice $i, 1 \leq i \leq n+1$.	1
6	Obținerea inegalității $$(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \dots \cdot(1-a_{n+1}) \geq n^{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{P}{a_1}\cdot\frac{P}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{P}{a_{n+1}}}$$	1
7	Obținerea inegalității $$\frac{(1-a_{n+1})\cdot(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \dots \cdot(1-a_n)}{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \geq n^{n+1}$$	1
	Punctaj total	**7 puncte**

11.3. Pentru orice număr natural m notăm cu $S(m)$ suma cifrelor numărului m. Calculați $S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right)$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Estimarea numărului de cifre $N(2023^{2023}) \leq M$, pentru un oarecare $M \leq 88888888$ (în particular, $M = 8092$)	1
2	Estimarea primei sume: $S(2023^{2023}) \leq 9M$ (în particular, $9M = 72828$)	1
3	Obținerea estimării pentru a doua sumă $S\left(S(2023^{2023})\right) \leq k$, pentru un oarecare $k \leq 78$ (în particular, $k = 43$)	1
4	Obținerea estimării pentru a treia sumă $S(S\left(S(2023^{2023})\right)) \leq p$, pentru un oarecare $p \leq 15$ (în particular, $p = 13$)	1
5	Demonstrarea că $2023^{2023} \equiv 7 (mod\, 9)$	1
6	Demonstrarea că $S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right) \equiv 7 (mod\, 9)$	1
7	Concluzionarea că $S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right) = 7$	1
	Punctaj total	**7 puncte**

11.4. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ derivabilă, strict descrescătoare, cu $f(0) = 1$ și $f'(0) = -1$. Fie șirul $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, definit prin: $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = a_n f(a_n)$, $\forall n \geq 1$. Arătați că există limita $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)$ și calculați această limită.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Demonstrarea că șirul $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ este mărginit inferior de 0	1
2	Demonstrarea că șirul $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ este strict descrescător	1

3	Obținerea că șirul $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ este convergent și $L = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$	1
4	Aplicarea lemei Cezaro-Stolz și obținerea $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right)$	1
5	Obținerea egalității $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{na_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-f(a_n)}{a_n f(a_n)}$	1
6	Obținerea egalității $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-f(x)}{x\cdot f(x)}\right) = 1$	1
7	Concluzionarea faptului că $\lim_{n\to\infty}(na_n) = 1$	1
	Punctaj total	**7 puncte**