

Республиканская Олимпиада по математике
5 марта 2022, XI–й класс

11.1. Пусть a и x_1 есть два положительных действительных числа. Докажите, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, определенная формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\forall n \geq 1$, имеет предел, и найдите этот предел.

11.2. Найдите все дифференцируемые функции $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяющие условиям $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ и $f'(x) = -f^3(x)$.

11.3. Решите на множестве действительных чисел уравнение

$$\cos \frac{\pi}{x} = -x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 1.$$

11.4. Пусть дан треугольник ABC и $BC = a$. Рассмотрим точку M на полупрямой $[CA)$ такую, что $\angle MBC = \angle BAC$. Найдите наименьшее возможное расстояние между центрами O_1 и O_2 окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и ABM .

11.5. В зоологическом саду живут x хамелеонов серого цвета, 2022 белого цвета и 100 розового цвета, которые могут встречаться, но только по двое. Если встречаются два хамелеона одного цвета, то их цвета не меняются после встречи. Если встречаются два хамелеона разных цветов, то они оба в тот же момент меняют свой цвет на оставшийся третий цвет. Известно, что в какой-то момент времени все хамелеоны зоологического сада стали одного цвета. Найти все возможные значения для x .

Время работы: 240 минут.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

Республиканская Олимпиада по математике
5 марта 2022, XI–й класс

11.1. Пусть a и x_1 есть два положительных действительных числа. Докажите, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, определенная формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\forall n \geq 1$, имеет предел, и найдите этот предел.

11.2. Найдите все дифференцируемые функции $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяющие условиям $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ и $f'(x) = -f^3(x)$.

11.3. Решите на множестве действительных чисел уравнение

$$\cos \frac{\pi}{x} = -x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 1.$$

11.4. Пусть дан треугольник ABC и $BC = a$. Рассмотрим точку M на полупрямой $[CA)$ такую, что $\angle MBC = \angle BAC$. Найдите наименьшее возможное расстояние между центрами O_1 и O_2 окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и ABM .

11.5. В зоологическом саду живут x хамелеонов серого цвета, 2022 белого цвета и 100 розового цвета, которые могут встречаться, но только по двое. Если встречаются два хамелеона одного цвета, то их цвета не меняются после встречи. Если встречаются два хамелеона разных цветов, то они оба в тот же момент меняют свой цвет на оставшийся третий цвет. Известно, что в какой-то момент времени все хамелеоны зоологического сада стали одного цвета. Найти все возможные значения для x .

Time Время работы: 240 минут.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!