

Olimpiada Republicană la Matematică

5 martie 2022, Clasa a XI-a

11.1. Fie a și x_1 două numere reale pozitive. Să se arate că șirul $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, definit prin relația $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\forall n \geq 1$, are limită și să se determine această limită.

11.2. Să se afle toate funcțiile derivabile $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, care verifică relațiile $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ și $f'(x) = -f^3(x)$.

11.3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\cos \frac{\pi}{x} = -x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 1.$$

11.4. Fie dat triunghiul ABC și $BC = a$. Considerăm un punct M pe semidreapta [CA), astfel încât $\angle MBC = \angle BAC$. Găsiți cea mai mică distanță posibilă dintre centrele O_1 și O_2 ale cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și ABM.

11.5. Într-o grădină zoologică locuiesc hameleoni de trei culori: x hameleoni de culoare sură, 2022 hameleoni de culoare albă și 100 hameleoni de culoare roz. Hameleonii se pot întâlni între ei, însă doar câte doi. Dacă se întâlnesc doi hameleoni de aceeași culoare, atunci ei nu își schimbă culoarea. Dacă se întâlnesc doi hameleoni de culori diferite, atunci ambii în același timp își schimbă culoarea în a treia culoare rămasă. Se știe că într-un moment de timp toți hameleonii din grădina zoologică au devenit de aceeași culoare. Aflați toate valorile posibile pentru x .

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !

Olimpiada Republicană la Matematică

5 martie 2022, Clasa a XI-a

11.1. Fie a și x_1 două numere reale pozitive. Să se arate că șirul $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, definit prin relația $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\forall n \geq 1$, are limită și să se determine această limită.

11.2. Să se afle toate funcțiile derivabile $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, care verifică relațiile $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ și $f'(x) = -f^3(x)$.

11.3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\cos \frac{\pi}{x} = -x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 1.$$

11.4. Fie dat triunghiul ABC și $BC = a$. Considerăm un punct M pe semidreapta [CA), astfel încât $\angle MBC = \angle BAC$. Găsiți cea mai mică distanță posibilă dintre centrele O_1 și O_2 ale cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și ABM.

11.5. Într-o grădină zoologică locuiesc hameleoni de trei culori: x hameleoni de culoare sură, 2022 hameleoni de culoare albă și 100 hameleoni de culoare roz. Hameleonii se pot întâlni între ei, însă doar câte doi. Dacă se întâlnesc doi hameleoni de aceeași culoare, atunci ei nu își schimbă culoarea. Dacă se întâlnesc doi hameleoni de culori diferite, atunci ambii în același timp își schimbă culoarea în a treia culoare rămasă. Se știe că într-un moment de timp toți hameleonii din grădina zoologică au devenit de aceeași culoare. Aflați toate valorile posibile pentru x .

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !