Clasa a XI-a. A doua zi
Soluții

11.5. Șirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este definit prin:

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2023},\ n \in \mathbf{N}$$

Demonstrați că șirul este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluție. Vom arăta prin inducție că $x_n \in (0; 1]$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Pentru $n = 0$ este adevărat, deoarece $x_0 = 1 \in (0; 1]$. Presupunem că $x_m \in (0; 1]$ pentru un oarecare $m \geq 0$. Atunci și $\frac{x_m}{2023} \in (0; 1]$ și obținem

$$x_{m+1} = x_m - \frac{x_m^2}{2023} = x_m \cdot \left(1 - \frac{x_m}{2023}\right) \in (0; 1].$$

Deci, conform principiului inducției matematice, $x_n \in (0; 1]$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

În plus, avem $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{x_n}{2023} < 1, \forall n \in \mathbf{N}$. Deci, șirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ este strict descrescător și mărginit inferior. În concluzie, el este convergent.

Notăm limita șirului $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Trecând la limită în relația recurentă dată, obținem $L = L - \frac{L^2}{2023}$, de unde rezultă că $L = 0$.

11.6. Rezolvați ecuația

$$\cos 2x - \sin 2x + 2\cos x + 1 = 0.$$

Soluție. Avem ecuațiile echivalente:

$$\cos 2x - \sin 2x + 2\cos x + 1 = 0$$
$$1 - 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 2\cos x + 1 = 0$$
$$\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos x - 1 = 0$$
$$(\sin^2 x - \sin x) + (\sin x \cos x - \cos x) + (\sin x - 1) = 0$$
$$(\sin x - 1) \cdot (\sin x + \cos x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin x - 1 = 0, \\ \sin x + \cos x + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Pentru a doua ecuație avem următoarele ecuații echivalente

$$\sin x + \cos x + 1 = 0$$
$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$$
$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1. \end{array}\right.$$

Deci, ecuația inițială s-a redus la trei ecuații: 1) $\sin x = 1$, 2) $\cos\frac{x}{2} = 0$ sau 3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$.

Ecuația $\sin x = 1$ are soluțiile $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
Ecuația $\cos\frac{x}{2} = 0$ are soluțiile $x = \pi + 2m\pi, m \in \mathbf{Z}$.
Ecuația $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = -1$ are soluțiile $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$.
Deci, soluțiile ecuației inițiale sunt $x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, x_0 \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

11.7. Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât polinomul

$$P(X) = X^3 - 3aX^2 + 3b^2X - c^3$$

are trei rădăcini reale, pozitive și distincte. Arătați că $a > b > c$.

Soluție. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rădăcinile reale, pozitive și distincte ale polinomului $P(X)$. Conform relațiilor lui Viète, avem că $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = c^3$ și $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 3b^2$. Deoarece $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sunt numere reale, pozitive și distincte, rezultă că numerele $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_3$, de asemenea, sunt reale, pozitive și distincte. Aplicând inegalitatea mediilor pentru aceste trei numere, obținem

$$b^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{3} > \sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2 \cdot \alpha_1\alpha_3 \cdot \alpha_2\alpha_3} = \sqrt[3]{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2} = c^2,$$

ceea ce implică inegalitatea $b > c$.
Derivând funcția polinomială respectivă $P(x) = x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3$, obținem $P'(x) = 3x^2 - 6ax + 3b^2$.
Deoarece rădăcinile polinomului de gradul trei $P(x)$ sunt reale, pozitive și distincte, rezultă că rădăcinile polinomului respectiv $P'(X)$, de asemenea sunt reale, pozitive și distincte, situându-se între rădăcinile polinomului $P(X)$ și reprezentând punctele critice ale funcției $P(x)$ (în care își schimbă direcția de monotonie, din crescătoare în descrescătoare sau invers).
Fie β_1, β_2 rădăcinile polinomului $P'(X) = 3X^2 - 6aX + 3b^2$. Similar, din relațiile lui Viète, avem $\beta_1\beta_2 = \frac{3b^2}{3} = b^2$ și $\beta_1 + \beta_2 = -\frac{-6a}{3} = 2a$.
Aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele reale, pozitive ;i distincte β_1, β_2, obținem

$$a = \frac{\beta_1+\beta_2}{2} > \sqrt{\beta_1\beta_2} = \sqrt{b^2} = b.$$

Astfel, am obținut $a > b > c$.

11.8. Găsiți toate funcțiile continue $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care verifică relația

$$3 \cdot f(2x + 1) = f(x) + 5x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Soluție. Mai întâi vom căuta soluțiile în clasa funcțiilor de gradul întâi, de forma $f(x) = ax + b$.

Pentru astfel de funcții obținem relațiile echivalente:

$$3 \cdot (a \cdot (2x + 1) + b) = ax + b + 5x, \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \Leftrightarrow$$

$$6ax + 3a + 3b = (a + 5)x + b, \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6a = a + 5, \\ 3a + 3b = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Este lesne de verificat, că funcția f_1, $f_1(x) = x - \frac{3}{2}$, satisface condițiile problemei.

Vom arăta că funcția f_1 este unica astfel de funcție.

Fie f o funcție continuă arbitrară, care verifică condițiile problemei și notăm funcția g, $g(x) = f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right)$. Funcția g este continuă. Vom arăta că $g(x) = 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$.

Înlocuim $f(x) = g(x) + x + \frac{3}{2}$ în relația dată și pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem următoarele relații echivalente:

$$3 \cdot \left(g(2x+1) + 2x + 1 - \frac{3}{2}\right) = g(x) + x - \frac{3}{2} + 5x \quad \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot g(2x+1) + 6x - \frac{3}{2} = g(x) + 6x - \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot g(2x+1) = g(x).$$

În ultima relație înlocuim $x \to \frac{x-1}{2}$ și obținem relații echivalente:

$$3 \cdot g\left(2 \cdot \frac{x-1}{2} + 1\right) = g\left(\frac{x-1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot g(x) = g\left(\frac{x-1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{3} \cdot g\left(\frac{x-1}{2}\right). \qquad (1)$$

Vom arăta prin inducție că

$$g(x) = \frac{1}{3^n} \cdot g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right), \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*. \qquad (2)$$

Pentru $n = 1$ am obținut (1).

Presupunem că pentru un $m \geq 1$ avem

$$g(x) = \frac{1}{3^m} \cdot g\left(\frac{x - 2^m + 1}{2^m}\right), \qquad \forall x \in \mathbf{R}. \qquad (3)$$

Atunci, din (1) și (3), în care vom înlocui $x \to \frac{x-1}{2}$, obținem:

$$g(x) = \frac{1}{3} \cdot g\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^m} \cdot g\left(\frac{\frac{x-1}{2} - 2^m + 1}{2^m}\right) = \frac{1}{3^{m+1}} \cdot g\left(\frac{x - 2^{m+1} + 1}{2^{m+1}}\right).$$

Astfel, relația (2) este demonstrată.

Deoarece g este o funcție continuă, atunci pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem

$$\lim_{n \to \infty} g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right) = g\left(\lim_{n \to \infty}\left(-1 + \frac{x+1}{2^n}\right)\right) = g(-1).$$

Astfel, trecând la limită în (2), obținem

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} \cdot g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} \cdot \lim_{n \to \infty} g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right) = 0 \cdot g(-1) = 0, \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Prin urmare, funcția $f, f(x) = x - \frac{3}{2}$, este unica funcție, care satisface condițiile problemei.