Clasa a XI-a Prima zi
Soluții

11.1. Comparați perimetrul unui pătrat cu lungimea cercului trasat prin mijlocul unei laturi și vârfurile laturii paralele. Argumentați răspunsul.

Soluție. Fie $ABCD$ un pătrat, M mijlocul laturii AB, N mijlocul laturii CD și a lungimea laturii pătratului. Considerăm cercul ce trece prin punctele M, C și D. Notăm cu O centrul acestui cerc și r raza lui. Centrul O se află pe mediatoarea segmentului CD, iar MN și CD sunt perpendiculare. Astfel, triunghiul OND este dreptunghic.
Avem $ON = MN - MO = a - r$, $ND = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$, $OD = r$. Aplicând teorema lui Pitagora, obținem $OD^2 = ON^2 + ND^2$, adică $r^2 = (a-r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, echivalent cu $r^2 = a^2 - 2ar + r^2 + \frac{a^2}{4}$. În consecință, $r = \frac{5a}{8}$, ceea ce implică faptul că lungimea cercului este $2\pi r = \frac{5\pi a}{4} < \frac{5 \cdot 3,2 \cdot a}{4} = 4a$, iar perimetrul pătratului este $4a$. Deci, perimetrul pătratului este mai mare decât lungimea cercului.

11.2. Fie numerele reale pozitive $a_1, \cdots, a_n$ ($n \in \mathbf{N}$), astfel încât $a_1 + \cdots + a_n < 1$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} \cdot \frac{(1-a_1) \cdot \cdots \cdot (1-a_n)}{1 - a_1 - \cdots - a_n} \geq n^{n+1}.$$

Soluție. Notăm:

$$a_{n+1} = 1 - (a_1 + \cdots + a_n).$$

Atunci, conform condiției problemei, avem $a_{n+1} > 0$ și inegalitatea cerută capătă forma

$$\frac{(1-a_{n+1}) \cdot (1-a_1) \cdot (1-a_2) \cdot \cdots \cdot (1-a_n)}{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \geq n^{n+1}.$$

Pentru orice $i = 1, 2, \cdots, n, n+1$ cercetăm expresia

$$1 - a_i = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_{n+1} > 0.$$

Notăm $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n+1}$. Conform inegalității mediilor, pentru orice $i, 1 \leq i \leq n+1$, avem:

$$1 - a_i \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdot \cdots \cdot a_{n+1}} = n \cdot \sqrt[n]{\frac{P}{a_i}}.$$

Înmulțim toate aceste $n+1$ inegalități și obținem:

$$(1-a_1) \cdot (1-a_2) \cdot \cdots \cdot (1-a_{n+1}) \geq n^{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{P}{a_1} \cdot \frac{P}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{P}{a_{n+1}}} = n^{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{P^{n+1}}{P}} =$$

$$n^{n+1} \cdot \sqrt[n]{P^n} = n^{n+1} \cdot P = n^{n+1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n+1}.$$

Deci,

$$\frac{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot\dots\cdot(1-a_{n+1})}{a_1\cdot a_2\cdots a_{n+1}}\geq n^{n+1}.$$

11.3. Pentru orice număr natural m notăm cu $S(m)$ suma cifrelor numărului m. Calculați $S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right)$.

Soluție.
Pentru orice număr natural m notăm prin $S(m)$ suma cifrelor și prin $N(m)$ numărul cifrelor ale numărului m. Avem $2023^{2023} < (10^4)^{2023} = 10^{8092}$, ceea ce implică $N(2023^{2023}) \leq 8092$. Numărul 2023^{2023} are nu mai mult de 8092 cifre, iar suma cifrelor lui nu depășește $9\cdot 8092$, adică

$$0 < S(2023^{2023}) \leq 9\cdot 8092 = 72828.$$

Numărul $S(2023^{2023})$ nu depășește numărul 72828, iar suma cifrelor lui nu depășește suma cifrelor numărului 79999 (păstrăm pentru prima cifră valoarea 7 (ca valoare maximă), iar celelalte cifre le înlocuim cu valoarea maximă 9). În rezultat obținem inegalitatea

$$0 < S\left(S(2023^{2023})\right) \leq S(79999) = 43.$$

Similar, numărul $S(S(2023^{2023}))$ nu depășește numărul 43, iar suma cifrelor lui nu depășește suma cifrelor numărului 49 (păstrăm pentru prima cifră valoarea 4 (ca valoare maximă), iar a doua cifră o înlocuim cu valoarea maximă 9). Obținem

$$0 < S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right) \leq S(49) = 13. \qquad (*)$$

Se știe că la împărțirea cu 9 orice număr natural m și suma cifrelor lui dau același rest, adică $m \equiv S(m) (mod\, 9), \forall m \in \mathbb{N}$. Deci,

$$2023^{2023} \equiv (S(2023))^{2023} \equiv 7^{2023} \equiv (7^3)^{674}\cdot 7 \equiv 1^{674}\cdot 7 \equiv 7 (mod\, 9).$$

Corespunzător, aplicând recursiv de trei ori proprietatea de congruență modulo 9, avem

$$S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right) \equiv S\left(S(2023^{2023})\right) \equiv S(2023^{2023}) \equiv 2023^{2023} \equiv 7 (mod\, 9). \qquad (**)$$

În consecință, din relațiile (*) și (**), obținem

$$S\left(S\left(S(2023^{2023})\right)\right) = 7.$$

11.4. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ derivabilă, strict descrescătoare, cu $f(0) = 1$ și $f'(0) = -1$. Fie șirul $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, definit prin: $a_1 = 1$ *și* $a_{n+1} = a_n f(a_n), \forall n \geq 1$. Arătați că există limita $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)$ și calculați această limită.

Soluție. Deoarece $a_1 = 1 > 0$ și $a_{n+1} = a_n f(a_n)$, $\forall n \geq 1$, prin inducție matematică se arată că $a_n > 0, \forall n \geq 1$.

Din faptul că funcția f este strict descrescătoare, rezultă inegalitățile: $0 < a_{n+1} = a_n f(a_n) < a_n f(0) = a_n$, $\forall n \geq 1$. Deci, șirul $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ este strict descrescător și mărginit inferior de 0. În concluzie, el este convergent și limita lui $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$.

Trecând la limită în relația recurentă $a_{n+1} = a_n f(a_n)$, $\forall n \geq 2$, din continuitatea funcției f, obținem egalitatea $L = L\cdot f(L)$, adică $L\cdot\left(1 - f(L)\right) = 0$. Dacă ar fi $L > 0$, atunci am obține $f(L) = 1 = f(0)$, contradicție cu faptul că funcția f este strict descrescătoare. Deci, $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = +\infty$.

În final, deoarece șirul $(n)_{n=1}^{\infty}$ este strict crescător și $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, putem aplica lema Stolz-Cezaro. Obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_nf(a_n)}-\frac{1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-f(a_n)}{a_nf(a_n)}.$$

Menționăm că din derivabilitatea funcției f și continuitatea ei rezultă că există limitele

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-f(x)}{x\cdot f(x)}\right)=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{f(x)}\right)=$$
$$-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=-f'(0)\cdot\frac{1}{f(0)}=1.$$

Prin urmare, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, există limita și pentru șirul

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-f(a_n)}{a_nf(a_n)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-f(x)}{x\cdot f(x)}\right)=1,$$

ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n)=1$.