

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 4 марта 2023 г., IX класс

9.1. Пусть треугольник ABC с $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$ и $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ длины его сторон. Покажите, что уравнение

$$x^2 - (a + b + c)x + b^2 + c^2 = 0$$

имеет два различных действительных решения.

9.2. вещественные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $x + y + z = a$, где a — фиксированное действительное число. Определите наибольшее значение суммы $S = xy + yz + zx$. Для каких значений x, y, z достигается это наибольшее значение?

9.3. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки E и F соответственно такие, что $\frac{EB}{EC} = p$ и $\frac{FC}{FD} = q$. Пусть M — точка пересечения прямых AE и BF , а N — точка пересечения прямых DE и BF . Определите значения отношений $\frac{AM}{ME}$ и $\frac{DN}{NE}$.

9.4. Определите все функции $f: R \rightarrow R$ удовлетворяющие свойству $f(x + a) \cdot f(x + b) = x$, $(\forall) x \in R$, где $a, b \in R$ — фиксированные произвольные числа.

Время работы: 240 минут.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!