OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

A doua zi, 3 martie 2024, Clasa a IX – a

SOLUȚIILE PROBLEMELOR

9.5. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $BC \parallel AD, BC > AD, AB \perp BC, m\,(\angle BCD) = 60^0$, $AC^2 - BD^2 = 40\sqrt{3}$. Determinați aria trapezului $ABCD$.

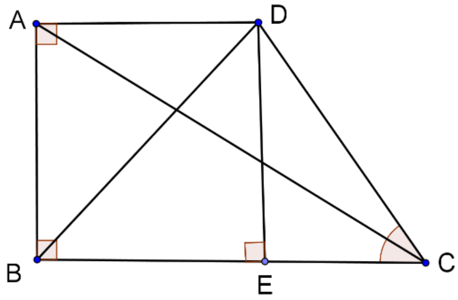

Figura 9.6

Soluție. Fie $BC = a,\ AD = b,\ a > b$ (vezi Figura 9.5). Ducem $DE \perp BC, E \in (BC)$. Atunci $AD = BE = b,\ AB = DE = h,\ CE = a - b$.

Cum $m\,(\angle BCD) = m\,(\angle ECD) = 60^0$, din triunghiul dreptunghic DEC avem relația $DE = AB = CE \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot (a-b)$. Din triunghiurile dreptunghice ABC și BED prin aplicarea teoremei Pitagora obținem sistemul de relații:

$$\begin{cases} AC^2 = BC^2 + AB^2 \\ BD^2 = BE^2 + DE^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC^2 = a^2 + 3(a-b)^2 \\ BD^2 = b^2 + 3(a-b)^2 \end{cases}.$$

Din ultimul sistem de relații avem relația $AC^2 - BD^2 = a^2 - b^2 = 40\sqrt{3}$. Atunci pentru aria trapezului $ABCD$ aplicăm formula ariei și obținem

$$A_{trapez} = \frac{BC + AD}{2} \cdot AB = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (a-b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a^2 - b^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 40\sqrt{3} = 60\ (u.p).$$

Răspuns: $\boldsymbol{A_{trapez} = 60\ u.p}$.

9.6. Pe tablă sunt scrise numerele naturale $1, 2, 3, \cdots, 2k, 2k+1$. Pentru un număr natural nenul fixat n la fiecare mișcare de pe tablă se șterg trei numere a, b, c și pe tablă se scrie numărul egal cu $a + b + c + n$. După k mișcări pe tablă a fost scris numărul n^2. Aflați numărul n.

Soluție. Cum la fiecare mișcare de pe tablă se șterg 3 numere diferite și se scrie doar un singur număr, rezultă că după fiecare mișcare pe tablă rămân cu 2 numere mai puțin. Atunci după k mișcări pe tablă va rămânea un singur număr, el fiind egal cu n^2. Pentru calculul lui n vom aplica relația care se bazează pe faptul că la cele k mișcări la rezultatul final s-a păstrat suma numerelor scrise inițial pe tablă, adăugandu-se de k ori numărul n:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2k + 2k + 1 + k \cdot n = n^2 \ \Leftrightarrow\ n^2 - k \cdot n - (k+1) \cdot (2k+1) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$n^2 - k \cdot n + (-k-1) \cdot (2k+1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} n = 2k+1 \\ n = -k-1 \end{array}\right. .$$

Cum $-k-1$ nu este număr natural, rezultă că $n = 2k+1$.

Răspuns: $\boldsymbol{n = 2k+1}$.

9.7. Determinați toate perechile de numere naturale (x, y) care satisfac ecuația

$$(x-y)^2 - 18(x+y) + 81 = 0.$$

Soluție. Observăm că dacă (x_0, y_0) este soluție a ecuației din enunț, atunci și (y_0, x_0) este deasemenea o soluție a acestei ecuații. Relația din enunț este simetrică în raport cu x și y. Putem presupune că $x \geq y$.

Vom arăta că soluțiile ecuației din enunț sunt pătrate perfecte. Avem relațiile

$$(x-y)^2 - 18(x+y) + 81 = 0 \iff (x-y)^2 - 18(x-y) + 81 = 36y \iff$$

$$(x-y-9)^2 = 36y \iff 6\sqrt{y} = |\, x-y-9 \,|,$$

$$(y-x)^2 - 18(y+x) + 81 = 0 \iff (y-x)^2 - 18(y-x) + 81 = 36x \iff$$

$$(y-x-9)^2 = 36x \iff 6\sqrt{x} = |\, y-x-9 \,|,$$

Din relațiile precedente rezultă că numerele x și y sunt pătrate perfecte.

Dacă $x - y \geq 9$, atunci

$$\begin{cases} 6\sqrt{y} = x-y-9 \\ 6\sqrt{x} = x-y+9 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \\ x-y = 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = (n+3)^2 \\ y = n^2, \ n \in N \end{cases}.$$

Dacă $x - y < 9$, atunci

$$\begin{cases} 6\sqrt{y} = 9-x+y \\ 6\sqrt{x} = x-y+9 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ x-y = 3\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Mulțimea soluțiilor S a ecuației din enunț se scrie astfel:

$$S = \{(4,1), (1,4)\} \cup \{(n^2+6n+9, n^2) \mid n \in N\} \cup \{(n^2, n^2+6n+9) \mid n \in N\}.$$

9.8. Fie *AB* o coarda fixată în cercul de centru *O* și rază *R*. Cercetăm toate triunghiurile înscrise în acest cerc care au una din laturi segmentul *AB*. Găsiți locul geometric al punctelor de intersecție a medianelor acestor triunghiuri.

Soluție. Prin punctul *O* și mijlocul segmentului *A*B trasăm o dreaptă m. Deoarece diametrul este trasat prin mijlocul coardei, atunci $m \perp (AB)$. Notăm $D = m \cap (AB), AD = DB = \frac{AB}{2} = a,\ OD = b$.

Întroducem sistemul de coordonate cu originea în punctul *D*: axa absciselor $Ox = (AB)$, semiaxa pozitivă a absciselor este semidreapta $(DB$, semiaxa negativă a absciselor este semidreapta $(DA$, semiaxa pozitivă a ordonatelor este semidreapta $(DO$. Avem

$$D = (0,0), \quad O = (0,b), \ A = (-a,0), \ B = (a,0).$$

Luăm oricare triunghi *ABC* din cele înscrise în cerc. Fie coordonatele vârfului *C* sunt: $C = (x, y)$. Segmentul *OC* este raza cercului egală cu *R*. Pe de altă parte, distanța dintre punctele *O* și *C* poate fi găsită cu ajutorul formulei

$$OC = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2}.$$

Astfel se îndeplinește egalitatea

$$x^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Fie *CD* mediana triunghiului *ABC*, trasată din punctul *C*. Dacă notăm cu *M* punctul de intersecție a medianelor în triunghiul *ABC*, atunci $CM: MD = 2: 1$.

Fie punctul *M* are coordonatele: $M = (u, v)$. Prin urmare $\overline{DM} = (u, v)$, $\overline{MC} = 2 \cdot \overline{DM}$. Deoarece $\overline{MC} = (x - u, y - v)$, atunci

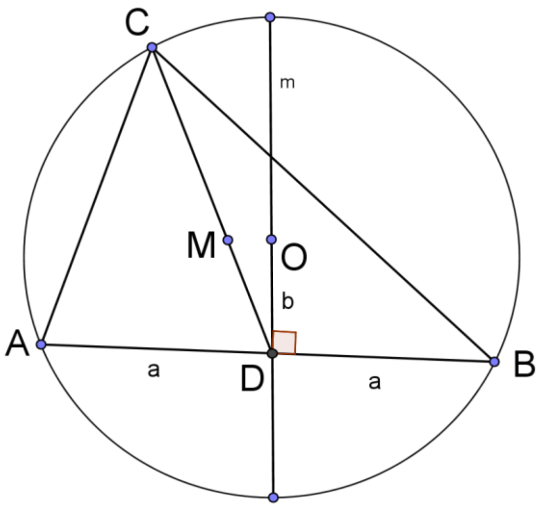

Figura 9.8

$$\begin{cases} x - u = 2u \\ y - v = 2v \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3u \\ y = 3v \end{cases}$$

Din relația (1) obținem

$$x^2 + (y - b)^2 = R^2$$
$$(3u)^2 + (3v - b)^2 = R^2$$
$$9u^2 + 9\left(v - \frac{b}{3}\right)^2 = R^2$$
$$u^2 + \left(v - \frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{R}{3}\right)^2.$$

Am obținut că distanța între punctele M și $O_1 = \left(0, \frac{b}{3}\right)$ este constantă, egală cu $\frac{R}{3}$. De aceea locul geometric căutat al punctelor de intersecție a medianelor triunghiurilor înscrise este cercul $C_1(O_1, R_1)$ cu centrul în punctul $O_1 = \left(0, \frac{b}{3}\right)$ și raza $R_1 = \frac{R}{3}$.

Dar observăm, că dacă punctul *C* coincide cu punctul *A* sau cu punctul *B*, atunci triunghiul *ABC* degenerează. Deaceea, din cercul obținut $C_1(O_1, R_1)$ trebuie să excludem 2 puncte – punctele de intersecție ale acestui cerc cu segmentul *AB*.