OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 5 martie 2023, Clasa a IX–a
Soluții

9.5. Suma unor numere naturale impare consecutive este 392. Aflați aceste numere.

Soluție. Notăm aceste numere : $2m+1,\ 2m+3,\ 2m+5,\ldots\ldots,2m+1+2k$ Numerele $m,\ k$ le aflăm din relația

$$2m+1+\ 2m+3+\ 2m+5+\cdots+\ 2m+1+2k=392$$

sau

$$\frac{2m+1+2m+1+2k}{2}\cdot(k+1)=392 \quad\Leftrightarrow\quad (2m+k+1)(k+1)=392=2^3\cdot 7^2$$

Dacă $k+1$ ar fi impar, atunci și $2m+k+1$ tot ar fi impar și atunci produsul lor ar fi impar, ceea ce contravine egalității $(2m+k+1)(k+1)=392$. Deci $k+1$ este par, atunci și $2m+k+1$ tot este par. Ținând cont că $392=2^3\cdot 7^2$, $(2m+k+1)(k+1)=2^3\cdot 7^2$ și că $2m+k+1>k+1$, obținem doar următoarele 3 cazuri:

2m+k+1	*k+1*	*m*	*k*	Se obțin numerele
$196=2^2\cdot 7^2$	2	97	1	195, 197
$98=2\cdot 7^2$	4	47	3	95, 97, 99, 101
$28=2^2\cdot 7$	14	7	13	15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41

9.6. Fie $x,y,\ z$ numere reale pozitive. Arătați că

$$\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4xyz}\geq\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+z}{x+z}.$$

Soluție. Împărțim inegalitatea din enunț la produsul pozitiv $(x+z)(y+z)$ obținem inegalitatea

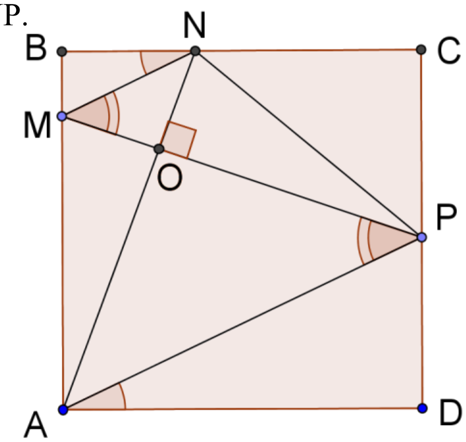
$$\frac{x+y}{4xyz}\geq\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}$$

echivalentă celei din enunț. Dar

$$\frac{x+y}{4xyz}=\frac{x}{4xyz}+\frac{y}{4xyz}=\frac{1}{4yz}+\frac{1}{4xz}$$

Din relația cunoscută $(a+b)^2\geq 4ab$, adevărată pentru oricare numere $a,b\ \in R^*$ obținem $\frac{1}{4ab}\geq\frac{1}{(a+b)^2}$, deci $\frac{1}{4yz}+\frac{1}{4xz}\geq\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}$. Astfel avem $\frac{x+y}{4xyz}\geq\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}$.
Rezultă că inegalitatea $\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4xyz}\geq\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+z}{x+z}$ este demonstrată.

9.7. Fie pătratul ABCD cu latura de lungime 3 cm. Punctele M, N și P sunt situate pe latura (AB), (BC) și, respectiv (CD) astfel, încât patrulaterul AMNP este un trapez cu bazele MN și AP, având diagonale perpendiculare și $BN=1\ cm$. Calculați perimetrul trapezului AMNP.



Soluție. Cum $BN\parallel AD$ și $MN\parallel AP$, atunci unghiurile BNM și DAP sun congruente, fapt care implică asemănarea triunghiurilor BNM și DAP. Deoarece $BN=1\ cm$, iar $AD=3\ cm$, rezultă că $AP=3\cdot MN$. Dacă $MP\cap AN=\{O\}$, atunci din congruențele unghiurilor OMN și OPA rezultă asemănarea triunghiurilor OMN și OPA. Astfel, obținem relațiile $OP=3\cdot OM,\ OA=3ON$. Din triunghiul ABN conform teoremei Pitagora obținem lungimea

segmentului AN: $AN^2 = BN^2 + BA^2 = 1^2 + 3^2 = 10$, de unde

$$AN = \sqrt{10}\ cm, ON = \frac{\sqrt{10}}{4}\ cm,\ \ OA = \frac{3\sqrt{10}}{4}\ cm.$$

Cum unghiurile OAM și BAN sunt congruente, rezultă că triunghiurile OAM și BAN sunt asemenea, de unde obținem relațiile:

$$\frac{OA}{BA} = \frac{OM}{BN} = \frac{AM}{AN} \iff \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{OM}{1} = \frac{AM}{\sqrt{10}} \iff OM = \frac{\sqrt{10}}{4}\ cm,\ \ AM = \frac{5}{2}\ cm.$$

Cum $OM = ON = \frac{\sqrt{10}}{4}\ cm$, rezultă că triunghiurile OMN și OPA sunt dreptunghice isoscele, fapt care arată că trapezul AMNP este isoscel cu $AM = NP = \frac{5}{2}\ cm$. Cum $BM = AB - AM = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\ (cm)$, din triunghiul MBN conform teoremei Pitagora obținem lungimile segmentelor MN și PA:

$$MN^2 = BM^2 + BN^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \implies MN = \frac{\sqrt{5}}{2}\ cm, \qquad PA = \frac{3\sqrt{5}}{2}\ cm.$$

Atunci perimetrul trapezului AMNP va fi egal cu $P(tr.AMNP) = \left(5 + 2\sqrt{5}\ \right) cm.$

9.8. Numerele naturale nenule n și m satisfac relația $n < m$. Arătați că

$$S = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m}$$

nu este număr natural.

Soluție. Notăm $M = \{n,\ n+1,\ n+2, \ldots\ldots, m\}$. Deoarece $m > n$, în mulțimea M sunt numere pare (din două numere consecutive unul este par). Fie $p \in M$ numărul care se împarte la cea mai mare putere a lui 2, să o notăm cu 2^α, $\alpha \in N^*$. Deci oricare ar fi numărul $x \in M$ avem că x nu se divide cu $2^{\alpha+1}$. Arătăm că p este unicul număr în M care se divide cu 2^α. Presupunem că $q \in M$ este un alt număr care se divide cu 2^α. Pentru fixarea ideilor considerăm $p < q$. Atunci există numerele naturale impare $k_1 < k_2$ astfel încât $p = 2^\alpha \cdot k_1$, $q = 2^\alpha \cdot k_2$. Avem
$p < q \iff k_1 < k_2 \iff k_1 + 1 \le k_2 \Rightarrow 2^\alpha \cdot (k_1 + 1) \le 2^\alpha \cdot k_2 = q \Rightarrow 2^\alpha \cdot (k_1 + 1) \in M$.
Cum $k_1 + 1$ este număr par obținem că $2^\alpha \cdot (k_1 + 1)$ se divide cu $2^{\alpha+1}$, contradicție. Deci p este unicul număr care se divide cu 2^α.
Aducem suma $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m}$ la același numitor. Cel mai mic numitor comun va conține factorul 2^α. Toți numărătorii sumei vor fi înmulțiți cu numere pare în afară de numărătorul fracției $\frac{1}{p}$, care se va înmulți cu un număr impar. Suma numerelor de la numărător va fi deci un număr impar. Cum numitorul comun este un număr par rezultă că S nu este număr natural (un număr impar nu se divide cu un număr par).