OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

Prima zi, 2 martie 2024, Clasa a IX – a

SOLUȚIILE PROBLEMELOR

9.1. Fie $S = \{x_1, x_2\}$ mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 10^{1012} \cdot x + 1012 = 0$. Arătați că numărul $a = (x_1)^2 + (x_2)^2$ este natural și calculați suma cifrelor acestui număr.

Soluție. Conform relațiilor Viete pentru ecuația din enunț avem relațiile

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10^{1012} \\ x_1 \cdot x_2 = 1012 \end{cases}.$$

În baza relațiilor Viete stabilim că

$$a = (x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 = (10^{1012})^2 - 2 \cdot 1012 = 10^{2024} - 2024.$$

Cum $10^{2024} > 2^{2024} > 2^{11} = 2048 > 2024$, rezultă că numărul a este natural. Atunci

$$a = 10^{2024} - 2024 = 10^{2024} - 1 - 2023 = \underbrace{999 \cdots 99999}_{2024\ ori} - 2023 = \underbrace{99 \cdots 9999}_{2020\ ori}7976.$$

Dacă notăm cu $s(a)$ suma cifrelor numărului a, atunci obținem

$$s(a) = 2021 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 6 = 18189 + 20 = 18209.$$

Răspuns: Suma cifrelor numărului natural a este egală cu 18209.

9.2. Determinați toate valorile intregi ale parametrului m pentru care ecuația $x^3 - 3x + m = 0$ are exact două soluții întregi.

Soluție. Fie $x = k$ o soluție întreagă a ecuației din enunț. Înlocuim în ecuație și obținem egalitatea $k^3 - 3k + m = 0$. Rezultă că parametrul m are forma $m = 3k - k^3$. Ecuația din enunț se scrie astfel:

$$x^3 - 3x + m = 0 \iff x^3 - 3x + 3k - k^3 = 0 \iff$$

$$(x^3 - k^3) - 3(x - k) = 0 \iff (x - k) \cdot (x^2 + kx + k^2) - 3(x - k) = 0 \iff$$

$$(x - k) \cdot (x^2 + kx + k^2 - 3) = 0 \iff \left[\begin{array}{c} x - k = 0 \\ x^2 + kx + k^2 - 3 = 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{c} x=k \\ 4x^2+4kx+k^2+3k^2-12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=k \\ (2x+k)^2=12-3k^2\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} x=k \\ (2x+k)^2=12-3k^2\geq 0 \\ -2\leq k\leq 2,\ \ k\in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=k \\ (2x+k)^2=12-3k^2\geq 0 \\ k\in\{-2,-1,1,2\} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ m=2 \end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \\ m=-2 \end{array}\right. .$$

Răspuns: $\boldsymbol{m=\pm 2}$.

9.3. Fie triunghiul dreptunghic *ABC* cu $m(\measuredangle ACB)=90°$, $\frac{BC}{AB}=\frac{2}{3}$. Punctul *M* este mijlocul catetei BC. Demonstrați că $m(\measuredangle ABC)=2\cdot m(\measuredangle CAM)$.

Soluție. Putem considera $BC=2k,\ AB=3k$ (vezi Figura 9.3). Fie punctul N, situat pe cateta AC, piciorul bisectoarei unghiului ABC. Notăm $NC=x$. Conform teoremei Pitagora din triunghiul ABC obținem

$AC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{9k^2-4k^2}=k\sqrt{5}$.

Atunci $AN=k\sqrt{5}-x$ și conform teoremei bisectoarei

avem relațiile $\frac{x}{k\sqrt{5}-x}=\frac{NC}{AN}=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{3}$

de unde $3x=2k\sqrt{5}-2x\Leftrightarrow\ x=\frac{2k\sqrt{5}}{5}$.

Atunci $\frac{NC}{MC}=\frac{2k\sqrt{5}}{5k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{BC}{AC}=\frac{2k}{k\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{NC}{MC}$.

Rezultă că triunghiurile dreptunghice *ACM* și *BCN* sunt asemenea și prin urmare: $m(\measuredangle CBN)=m(\measuredangle CAM)$.

Atunci $m(\measuredangle ABC)=2m(\measuredangle CBN)=2m(\measuredangle CAM)$.

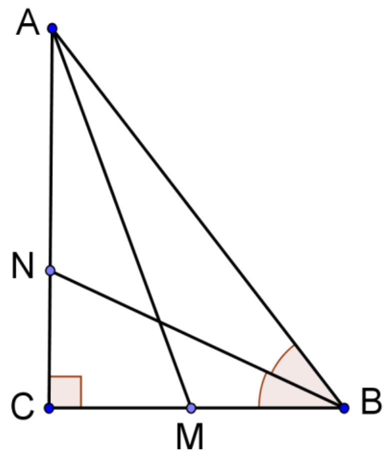

Figura 9.3

9.4. Numerele reale pozitive a,b,c satisfac egalitatea $a+b+c=3abc$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geq 3.$$

Soluție. Egalitatea din enunț este echivalentă cu $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=3$. Pentru numerele pozitive x, y, z este justă inegalitatea $MA-MG$ $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$, care va fi aplicată repetat în următoarele relații:

$$2\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+3=\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+1\right)+\left(1+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+\left(\frac{1}{a^3}+1+\frac{1}{c^3}\right)\geq$$

$$3\cdot\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=9 \;\Rightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)\geq 6 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geq 3.$$