OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a IX–a
Soluții

9.1. Fie triunghiul ABC cu $m(\measuredangle A) > 90°$ și $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ lungimile laturilor lui. Arătați că ecuația

$$x^2 - (a+b+c)x + b^2 + c^2 = 0$$

are două soluții reale distincte.

Soluție 1. Este suficient să arătăm că $\Delta > 0$, adică $(a+b+c)^2 - 4(b^2+c^2) > 0$.
În adevăr, din $m(\measuredangle A) > 90° \Rightarrow a > b,\ a > c \Rightarrow ab > b^2,\ ac > c^2$. Dar într-un triunghi suma lungimilor a doauă laturi este mai mare ca latura a treia. Deci $b + c > a$. Atunci

$$a - (b+c) \neq 0 \ \Rightarrow (a-(b+c))^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a(b+c) + (b+c)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 - 4a(b+c) > 0 \quad \Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 4a(b+c) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 > 4a(b+c) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 > 4(ab+ac) > 4(b^2+c^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 - 4(b^2+c^2) > 0 \ \Leftrightarrow \Delta > 0.$$

Deci ecuația are două soluții reale distincte.

Soluție 2. Este suficient să arătăm că $\Delta > 0$, adică $(a+b+c)^2 - 4(b^2+c^2) > 0$.
În adevăr, din $m(\measuredangle A) > 90° \Rightarrow a > b,\ a > c \ \Rightarrow ab > b^2,\ ac > c^2$

$$\Delta = (a+b+c)^2 - 4(b^2+c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) - 4(b^2+c^2) =$$

$$= a^2 + 2(ab+ac+bc) - 3(b^2+c^2) > a^2 + 2(b^2+c^2+bc) - 3(b^2+c^2) =$$

$$= a^2 + 2bc - (b^2+c^2) = a^2 - (b^2+c^2-2bc) = a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) =$$

$$= (a+c-b)(a+b-c) > 0.$$

Într-un triunghi suma lungimilor a două laturi este mai mare ca latura a treia. Deci $\Delta > 0$, și ecuația are două soluții reale distincte.

9.2. Numerele reale x, y, z satisfac relația $x + y + z = a$, unde a este un număr real fixat. Determinați valoarea maximală posibilă a sumei $S = xy + yz + zx$. Pentru care valori x, y, z această valoare maximală se atinge ?

Soluție. $x + y + z = a \quad \Rightarrow \quad z = a - x - y \quad \Rightarrow \quad S = xy + y(a-x-y) + x(a-x-y) =$
$= xy + ay - xy - y^2 + ax - x^2 - xy = -x^2 + (a-y)x + y(a-y)$.
Considerăm S ca funcție de gradul doi în x cu coeficientul superior -1, termenul liber $y(a-y)$ și coeficientul lui x egal cu $a-y$. Deci $S(x) = -x^2 + (a-y)x + y(a-y)$. Cum $-1 < 0$ atunci S admite un maxim în $x = \frac{-(a-y)}{-2} = \frac{a-y}{2}$. Calculăm acest maximum.

$$S\left(\frac{a-y}{2}\right) = -\left(\frac{a-y}{2}\right)^2 + (a-y)\left(\frac{a-y}{2}\right) + y(a-y) = -\left(\frac{a-y}{2}\right)^2 + \frac{(a-y)^2}{2} + y(a-y) =$$

$$= \frac{(a-y)^2}{4} + y(a-y) = \frac{a^2}{4} - \frac{2ay}{4} + \frac{y^2}{4} + ay - y^2 = -\frac{3}{4} \cdot y^2 + \frac{a}{2} \cdot y + \frac{a^2}{4}.$$

Considerăm această expresie ca o funcție $g(y)$ de gradul doi în y cu coeficientul superior $-\frac{3}{4}$, termenul liber $\frac{a^2}{4}$ și coeficientul lui y egal cu $\frac{a}{2}$. Deci $g(y) = -\frac{3}{4} \cdot y^2 + \frac{a}{2} \cdot y + \frac{a^2}{4}$. Valoarea maximă a acestei funcții este în $y = -\frac{a}{2} : 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{a}{3}$, și este $g\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{3}$.

Cum $x = \frac{a-y}{2} = \frac{a - \frac{a}{3}}{2} = \frac{a}{3}$, atunci $z = a - x - y = a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$.

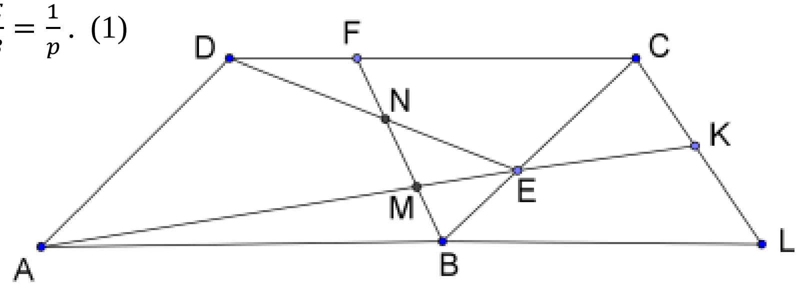
Deci maximul sumei $xy + yz + zx$ este $\frac{a^2}{3}$ și se realizează pentru $x = y = z = \frac{a}{3}$.

9.3. Pe laturile BC și BF ale paralelogramului $ABCD$ se iau respective punctele E și F astfel încât $\frac{EB}{EC} = p$ și $\frac{FC}{FD} = q$. Fie M punctul de intersecție a dreptelor AE și BF, iar N punctul de intersecție a dreptelor DE și BF. Determinați valorile raporturilor $\frac{AM}{ME}$ și $\frac{DN}{NE}$.

Soluție. Trasăm $CL \parallel BF$ $(L \in AB)$ și fie K intersecția dreptelor CL și AE.

$BM \parallel CK \Rightarrow \Delta BEM \sim \Delta CEK \Rightarrow \frac{KE}{EM} = \frac{CE}{EB} = \frac{1}{p}$. (1)

$\frac{AM}{ME} = \frac{AM}{MK} \cdot \frac{MK}{ME}$ (2)



$BM \parallel KL \Rightarrow \Delta BMA \sim \Delta LKA \Rightarrow$ $\frac{AM}{MK} = \frac{AB}{BL} = \frac{DC}{FC} = \frac{FD+FC}{FC} = 1 + \frac{FD}{FC} = 1 + \frac{1}{q} = \frac{q+1}{q}$. (3)

$\frac{MK}{ME} = \frac{ME+KE}{ME} = 1 + \frac{KE}{ME} = 1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$. (4) .

Aplicăm (3) și (4) în (2) și obținem $\frac{AM}{ME} = \frac{q+1}{q} \cdot \frac{p+1}{p} = \frac{(q+1)(p+1)}{qp}$.

Aplicăm Teorema lui Menelaus în ΔCDE și punctele coliniare F, N, B pe dreptele DC, DE, CE.

$$\frac{BE}{BC} \cdot \frac{CF}{FD} \cdot \frac{DN}{NE} = 1 \Leftrightarrow \frac{DN}{NE} = \frac{BC}{BE} \cdot \frac{FD}{CF} = \frac{BC}{BE} \cdot \frac{1}{q} = \frac{BE+EC}{BE} \cdot \frac{1}{q} = \left(1 + \frac{EC}{BE}\right)\left(\frac{1}{q}\right) = \left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p+1}{pq}.$$

9.4. Determinați toate funcțiile $f: R \to R$, care satisfac proprietatea $f(x+a) \cdot f(x+b) = x, (\forall) x \in R$, unde $a, b \in R$ sunt numere arbitrare fixate.

Soluție. Din $f(x+a) \cdot f(x+b) = x$ pentru $x = 0$ obținem $f(a) \cdot f(b) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(a) = 0 \\ f(b) = 0 \end{array}\right.$.

Pentru $x = a - b$ obținem că $f(2a - b) \cdot f(a) = a - b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Pentru $x = b - a$ obținem că $f(b) \cdot f(2b - a) = b - a \Leftrightarrow b - a = 0 \Leftrightarrow b = a$.

Astfel, pentru $a = b$ obținem relația $(f(x+a))^2 = x, (\forall) x \in R$, contradicție. Deci, nu există funcții care ar satisface enunțul.