РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 4 марта 2023 г., IX класс
СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

9.1. Пусть треугольник ABC с $m(\measuredangle A) > 90°$ и $a = |BC|,\ b = |AC|,\ c = |AB|$ - длины его сторон. Покажите, что уравнение

$$x^2 - (a + b + c)x + b^2 + c^2 = 0$$

имеет два различных действительных решения.

Решение со схемой распределения баллов **Решение 1.**

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Приводит достаточное условие $(a + b + c)^2 - 4(b^2 + c^2) > 0$.	1 балл
2.	Отмечает: из $m(\measuredangle A) > 90° \Rightarrow a > b,\ a > c \Rightarrow ab > b^2, ac > c^2$ и $b + c > a$.	1 балл
3.	Делает вывод $a - (b + c) \neq 0 \Rightarrow (a - (b + c))^2 > 0$	1 балл
4.	Получает $a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - 4a(b + c) > 0$	1 балл
5.	Получает $(a + b + c)^2 - 4a(b + c) > 0$	1 балл
6.	Получает $(a + b + c)^2 > 4(ab + ac) > 4(b^2 + c^2)$	1 балл
7.	Получает $(a + b + c)^2 - 4(b^2 + c^2) > 0$ и делает вывод, что уравнение имеет два различных действительных решения.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.1. Пусть треугольник ABC с $m(\measuredangle A) > 90°$ и $a = |BC|,\ b = |AC|,\ c = |AB|$ - длины его сторон. Покажите, что уравнение

$$x^2 - (a + b + c)x + b^2 + c^2 = 0$$

имеет два различных действительных решения.

Решение со схемой распределения баллов **Решение 2.**

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Приводит достаточное условие $(a + b + c)^2 - 4(b^2 + c^2) > 0$.	1 балл
2.	Отмечает: из $m(\measuredangle A) > 90° \Rightarrow a > b,\ a > c \Rightarrow ab > b^2, ac > c^2$ и $b + c > a$.	1 балл
3.	Получает $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) - 4(b^2 + c^2)$	1 балл
4.	Получает $a^2 + 2(ab + ac + bc) - 3(b^2 + c^2) > a^2 + 2(b^2 + c^2 + bc) - 3(b^2 + c^2)$	1 балл
5.	Получает $a^2 + 2bc - (b^2 + c^2) = a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)$	1 балл
6.	Пишет разложение $a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c)$	1 балл
7.	Из свойства, что в треугольнике сумма длин двух сторон больше, чем третья сторона, выводит, что $(a + c - b)(a + b - c) > 0$ и заключает, что уравнение имеет два различных действительных решения.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.2. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $x+y+z=a$, где $a-$ фиксированное действительное число. Определите наибольшее значение суммы $S=xy+yz+zx$. Для каких значений x, y, z достигается это наибольшее значение?		
Решение со схемой распределения баллов.		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Вывод $x+y+z=a \Rightarrow z=a-x-y \Rightarrow S=-x^2+(a-y)x+y(a-y)$.	1 балл
2.	Рассматривает квадратичную функцию относительно x: $S(x)=-x^2+(a-y)x+y(a-y)$ и выводит, что $S(x)$ достигает максимум в $x=\frac{a-y}{2}$.	1 балл
3.	Вычисляет этот максимум: $S\left(\frac{a-y}{2}\right)=-\frac{3}{4}\cdot y^2+\frac{a}{2}\cdot y+\frac{a^2}{4}$.	1 балл
4.	Рассматривает квадратичную функцию относительно y: $g(y)=-\frac{3}{4}\cdot y^2+\frac{a}{2}\cdot y+\frac{a^2}{4}$ и выводит, что $g(y)$ достигает максимум в $y=\frac{a}{3}$.	2 балла
5.	Вычисляет этот максимум: $g\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a^2}{3}$.	1 балл
6.	Выводит равенства $x=y=z=\frac{a}{3}$.	1 балл
7.	Делает вывод, что максимум суммы $xy+yz+zx$ равен $\frac{a^2}{3}$ и достигается при $x=y=z=\frac{a}{3}$.	
	Общее количество баллов	7 баллов

9.3. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки E и F соответственно так, что $\frac{EB}{EC}=p$ и $\frac{FC}{FD}=q$. Пусть $M-$ точка пересечения прямых AE и BF, а $N-$ точка пересечения прямых DE и BF. Определите значения отношений $\frac{AM}{ME}$ и $\frac{DN}{NE}$.		
Решение со схемой распределения баллов.		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Делает вспомогательные построения, ведущие к решению задачи: например, проведем $CL \parallel BF$ $(L \in AB)$ и пусть K — пересечение прямых CL и AE	1 балл
2.	Доказывает $\triangle BEM \sim \triangle CEK$ и выводит $\frac{KE}{EM}=\frac{CE}{EB}=\frac{1}{p}$.	1 балл
3.	Написано равенство $\frac{AM}{ME}=\frac{AM}{MK}\cdot\frac{MK}{ME}$.	1 балл
4.	Доказывает подобие треугольников $\triangle BMA \sim \triangle LKA$ и выводит равенство $\frac{AM}{MK}=\frac{q+1}{q}$.	1 балл
5.	Выводит равенства $\frac{MK}{ME}=\frac{p+1}{p}$ и $\frac{AM}{ME}=\frac{(q+1)(p+1)}{qp}$.	1 балл
6.	Применяет теорему Менелая в $\triangle CDE$ и коллинеарным точкам F, N, B на прямых DC, DE, CE и получает $\frac{BE}{BC}\cdot\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DN}{NE}=1$.	1 балл
7.	Получает $\frac{DN}{NE}=\frac{BC}{BE}\cdot\frac{FD}{CF}=\frac{p+1}{pq}$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.4. Определить все функции $f: R \to R$ удовлетворяющие свойству $f(x+a) \cdot f(x+b) = x, \ (\forall) x \in R,$ где $a, \ b \ \in R -$ фиксированные произвольные числа.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получает условие $f(a) \cdot f(b) = 0 \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(a) = 0 \\ f(b) = 0 \end{array}\right.$.	1 балл
2.	Для $x = a - b \geq 0$ получает условие $f(2a - b)f(a) = a - b$, откуда следует, что $a = b$.	2 балла
3.	Для $x = b - a \geq 0$ получает условие $f(2b - a)f(b) = b - a$, откуда следует, что $a = b$.	2 балла
4.	При $a = b$ получает, что $f^2(x + a) = x \ (\forall) x \in \mathbf{R}$, противоречие.	1 балл
5.	Окончательный вывод, что функций, удовлетворяющих условиям задачи, не существует.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов