OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 5 martie 2023, Clasa a IX–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

9.5. Suma unor numere naturale impare consecutive este 392. Aflați aceste numere.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Notează favorabil numerele și scrie relația $2m+1+\ 2m+3+\ 2m+5+\cdots+\ 2m+1+2k=392$	1 punct
2.	Obține relația $(2m+k+1)(k+1)=392=2^3\cdot 7^2$	1 punct
3.	Argumentează factorii $(2m+k+1)$ și $(k+1)$ trebuie să fie simultan numere pare.	1 punct
4.	Argumentează că sunt posibile doar trei cazuri: ($(2m+k+1)(k+1)=2^3\cdot 7^2$ și că $2m+k+1>k+1$)	1 punct
5.	Cercetează cazul $2m+k+1=196=2^2\cdot 7^2$, $k+1=2$ și obține numerele 195, 197	1 punct
6.	Cercetează cazul $2m+k+1=98=2\cdot 7^2$, $k+1=4$ și obține numerele 95, 97, 99, 101	1 punct
7.	Cercetează cazul $2m+k+1=28=2^2\cdot 7$, $k+1=14$ și obține numerele 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.6. Fie $x, y,\ z$ numere reale pozitive. Arătați că

$$\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4xyz}\geq\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+z}{x+z}$$

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Ideea de a împărți inegalitatea la produsul $(x+z)(y+z)$	1 punct
2.	Obține $\frac{x+y}{4xyz}\geq\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}$	1 punct
3.	Obține $\frac{x+y}{4xyz}=\frac{1}{4yz}+\frac{1}{4xz}$	1 punct
4.	Deducția $(a+b)^2\geq 4ab\Rightarrow\frac{1}{4ab}\geq\frac{1}{(a+b)^2}$ $(\forall)\ a,b\in R^*$	1 punct
5.	Obține $\frac{1}{4yz}+\frac{1}{4xz}\geq\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}$	1 punct
6.	Obține $\frac{x+y}{4xyz}\geq\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}$	1 punct
7.	Concluzia finală că $\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4xyz}\geq\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+z}{x+z}$ este demonstrată.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.7. Fie pătratul ABCD cu latura de lungime 3 cm. Punctele M, N și P sunt situate pe latura (AB), (BC) și, respectiv (CD) astfel, încât patrulaterul AMNP este un trapez cu bazele MN și AP, având diagonale perpendiculare și $BN = 1\ cm$. Calculați perimetrul trapezului AMNP.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Demonstrează asemănarea triunghiurilor BNM și DAP și obține $AP = 3 \cdot MN$.	1 punct
2.	Demonstrează asemănarea triunghiurilor OMN și OPA, obține relațiile $OP = 3 \cdot OM$, $OA = 3ON$.	1 punct
3.	Obține $AN = \sqrt{10}\ cm, ON = \frac{\sqrt{10}}{4}\ cm,\ \ OA = \frac{3\sqrt{10}}{4}\ cm.$	1 punct
4.	Demonstrează asemănarea triunghiurilor OAM și BAN , obține relațiile: $\frac{OA}{BA} = \frac{OM}{BN} = \frac{AM}{AN} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{OM}{1} = \frac{AM}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow OM = \frac{\sqrt{10}}{4}\ cm,\ AM = \frac{5}{2}\ cm.$	1 punct
5.	Deduce că triunghiurile OMN și OPA sunt dreptunghice isoscele, trapezul AMNP este isoscel și $AM = NP = \frac{5}{2}\ cm.,\ BM == \frac{1}{2}\ (cm)$.	1 punct
6.	Aplică teorema lui Pitagora în triunghiul MBN și obține $MN = \frac{\sqrt{5}}{2}\ cm,\ PA = \frac{3\sqrt{5}}{2}\ cm.$	1 punct
7.	Obține că perimetrul trapezului AMNP este egal cu $\left(5 + 2\sqrt{5}\right) cm$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.8. Numerele naturale nenule n și m satisfac relația $n < m$. Arătați că $$S = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m}$$ nu este număr natural.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Consideră mulțimea $M = \{n,\ n+1,\ \ n+2, \ldots\ldots, m\}$, argumentează că în ea sunt numere pare.	1 punct
2.	Consideră numărul $p \in M$ care se divide la cea mai mare putere a lui 2:, 2^{α} și concluzionează că $(\forall)x \in M$ nu se divide cu $2^{\alpha+1}$.	1 punct
3.	Demonstrează că numărul p este unic.	2 punct
4.	Aduce suma $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m}$ la același numitor. Cel mai mic numitor comun va conține factorul 2^{α}.	1 punct
5.	Observația că toți numărătorii sumei vor fi înmulțiți cu numere pare în afară de numărătorul fracției $\frac{1}{p}$, care se va înmulțiți cu un număr impar.	1 punct
6.	Deducția că suma numerelor de la numărător va fi un număr impar, ir numitorul comun este un număr par rezultă că S nu este număr natural	1 punct
	Punctaj total	7 puncte