**OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ**
**Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a IX–a**

**BAREM DE EVALUARE**

**Remarcă.** ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

**9.1.** Fie triunghiul $ABC$ cu $m(\measuredangle A) > 90°$ și $a = |BC|,\ b = |AC|,\ c = |AB|$ lungimile laturilor lui. Arătați că ecuația

$$x^2 - (a + b + c)x + b^2 + c^2 = 0$$

are două soluții reale distincte.

Rezolvare cu barem de evaluare **Soluția 1.**

| Pas | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
|---|---|---|
| 1. | Scrie condiția suficientă $(a + b + c)^2 - 4(b^2 + c^2) > 0$. | 1 punct |
| 2. | Remarcă, din $m(\measuredangle A) > 90° \Rightarrow a > b,\ a > c \Rightarrow ab > b^2,\ ac > c^2$ și $b + c > a$. | 1 punct |
| 3. | Concluzionează $a - (b + c) \neq 0 \Rightarrow (a - (b + c))^2 > 0$ | 1 punct |
| 4. | Obține $a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 - 4a(b + c) > 0$ | 1 punct |
| 5. | Obține $(a + b + c)^2 - 4a(b + c) > 0$ | 1 punct |
| 6. | Deduce $(a + b + c)^2 > 4(ab + ac) > 4(b^2 + c^2)$ | 1 punct |
| 7. | Obține $(a + b + c)^2 - 4(b^2 + c^2) > 0$ și concluzionează că ecuația are două soluții reale distincte. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |
| | | |

**9.1.** Fie triunghiul $ABC$ cu $m(\measuredangle A) > 90°$ și $a = |BC|,\ b = |AC|,\ c = |AB|$ lungimile laturilor lui. Arătați că ecuația

$$x^2 - (a + b + c)x + b^2 + c^2 = 0$$

are două soluții reale distincte.

Rezolvare cu barem de evaluare **Soluția 2.**

| Pas | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
|---|---|---|
| 1. | Scrie condiția suficientă $(a + b + c)^2 - 4(b^2 + c^2) > 0$. | 1 punct |
| 2. | Remarcă, din $m(\measuredangle A) > 90° \Rightarrow a > b,\ a > c \Rightarrow ab > b^2,\ ac > c^2$ | 1 punct |
| 3. | Obține $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) - 4(b^2 + c^2)$ | 1 punct |
| 4. | Obține $a^2 + 2(ab + ac + bc) - 3(b^2 + c^2) > a^2 + 2(b^2 + c^2 + bc) - 3(b^2 + c^2)$ | 1 punct |
| 5. | Obține $a^2 + 2bc - (b^2 + c^2) = a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)$ | 1 punct |
| 6. | Scrie $a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c)$ | 1 punct |
| 7. | Deduce $(a + c - b)(a + b - c) > 0$ din proprietatea că într-un triunghi suma lungimilor a două laturi este mai mare ca latura a treia și concluzionează că ecuația are două soluții reale distincte. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

| **9.2.** Numerele reale $x, y, z$ satisfac relația $x + y + z = a$, unde $a$ este un număr real fixat. Determinați valoarea maximă posibilă a sumei $S = xy + yz + zx$. Pentru care valori $x, y,\ z$ această valoare maximă se atinge ? | | |
|---|---|---|
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pas | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Deduce $x + y + z = a \quad \Rightarrow \quad z = a - x - y \quad \Rightarrow \quad S = -x^2 + (a - y)x + y(a - y)$. | 1 punct |
| 2. | Consideră funcția de gradul doi în $x$: $S(x) = -x^2 + (a - y)x + y(a - y)$ și deduce că $S(x)$ admite un maxim în $x = \frac{a-y}{2}$. | 1 punct |
| 3. | Calculează acest maximum: $S\left(\frac{a-y}{2}\right) = -\frac{3}{4} \cdot y^2 + \frac{a}{2} \cdot y + \frac{a^2}{4}$. | 1 punct |
| 4. | Consideră funcția de gradul doi în $y$: $g(y) = -\frac{3}{4} \cdot y^2 + \frac{a}{2} \cdot y + \frac{a^2}{4}$ și deduce că $g(y)$ admite un maxim în $y = \frac{a}{3}$. | 1 punct |
| 5. | Calculează acest maximum: $g\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{a^2}{3}$. | 1 punct |
| 6. | Deduce $x = y = z = \frac{a}{3}$. | 1 punct |
| 7. | Concluzionează că maximul sumei $xy + yz + zx$ este $\frac{a^2}{3}$ și se realizează pentru $x = y = z = \frac{a}{3}$. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

| **9.3.** Pe laturile $BC$ și $BF$ ale paralelogramului $ABCD$ se iau respective punctele $E$ și $F$ astfel încât $\frac{EB}{EC} = p$ și $\frac{FC}{FD} = q$. Fie $M$ punctul de intersecție a dreptelor $AE$ și $BF$, iar $N$ punctul de intersecție a dreptelor $DE$ și $BF$. Determinați valorile raporturilor $\frac{AM}{ME}$ și $\frac{DN}{NE}$. | | |
|---|---|---|
| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
| Pas | Etape ale rezolvării | Punctaj acordat |
| 1. | Efectuează construcții ajutătoare care duc la rezolvarea problemei: de exemplu Trasăm $CL \parallel BF$ $(L \in AB)$ și fie $K$ intersecția dreptelor $CL$ și $AE$ | 1 punct |
| 2. | Demonstrează $\Delta BEM \sim \Delta CEK$ și deduce $\Rightarrow \frac{KE}{EM} = \frac{CE}{EB} = \frac{1}{p}$ | 1 punct |
| 3. | Scrie $\frac{AM}{ME} = \frac{AM}{MK} \cdot \frac{MK}{ME}$ | 1 punct |
| 4. | Demonstrează $\Delta BMA \sim \Delta LKA$ și deduce $\frac{AM}{MK} = \frac{q+1}{q}$ | 1 punct |
| 5. | Deduce $\frac{MK}{ME} = \frac{p+1}{p}$ și $\frac{AM}{ME} = \frac{(q+1)(p+1)}{qp}$ | 1 punct |
| 6. | Aplică Teorema lui Menelaus în $\Delta CDE$ și punctele coliniare $F, N, B$ pe dreptele $DC, DE, CE$ și obține $\frac{BE}{BC} \cdot \frac{CF}{FD} \cdot \frac{DN}{NE} = 1$ | 1 punct |
| 7. | Obține $\frac{DN}{NE} = \frac{BC}{BE} \cdot \frac{FD}{CF} = \frac{p+1}{pq}$ | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |

**9.4.** Determinați toate funcțiile $f: R \to R$, care satisfac proprietatea $f(x+a) \cdot f(x+b) = x, (\forall) x \in R$, unde $a,\ b\ \in R$ sunt numere arbitrare fixate.

| Rezolvare cu barem de evaluare | | |
|---|---|---|
| **Pas** | **Etape ale rezolvării** | **Punctaj acordat** |
| 1. | Pentru $x = 0$ obține implicația $f(a) \cdot f(b) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(a) = 0 \\ f(b) = 0 \end{array}\right.$. | 1 punct |
| 2. | Pentru $x = a - b$ obține egalitatea $f(2a - b) \cdot f(a) = a - b \Rightarrow a = b$ . | 2 puncte |
| 3. | Pentru $x = b - a$ obține egalitatea $f(b) \cdot f(2b - a) = b - a \Rightarrow b = a$ . | 2 puncte |
| 4. | Pentru $a = b$ obține relația $\left(f(x+a)\right)^2 = x, (\forall) x \in R,$ contradicție | 1 punct |
| 5. | Face concluzia finală, că nu există funcții care ar satisface enunțul. | 1 punct |
| | Punctaj total | 7 puncte |