OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 3 martie 2024, Clasa a VIII–a
Soluții

8.5. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm suma $S_n = \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \cdots + \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}$.

Determinați dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care suma S_n este număr natural.

Rezolvare.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$este justă reprezentarea $\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2} = \frac{(n^2+3n+2)+1}{n^2+3n+2} = 1 + \frac{1}{n^2+3n+2}$.

Descompunem în factori expresia $n^2 + 3n + 2 = n^2 + n + 2n + 2 = (n+1)(n+2)$.

Atunci $S_n = \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \left(1 + \frac{1}{12}\right) + \left(1 + \frac{1}{20}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \left(1 + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

Reprezentăm $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ și obținem

$$S_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\ termeni} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

$$S_n = n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = n + \frac{n}{2(n+2)}.$$

Dacă presupunem că $S_n \in \mathbb{N}$, atunci rezultă ca $\frac{n}{2(n+2)}$ este număr natural pentru careva $n \in \mathbb{N}^*$. Aceasta este imposibil, deoarece fracția $\frac{n}{2(n+2)}$ este subunitară.

***Răspuns*: Nu există.**

8.6. Arătați că pentru orice numere reale pozitive a, b, c, d este justă inegalitatea

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}.$$

Rezolvare. Notăm $+c + d = 2x$, $a + c + d = 2y$, $a + b + d = 2z$, $a + b + c = 2t$.

Exprimăm numerele a, b, c și d prin numerele pozitive x, y, z și t:

$$3a + 3b + 3c + 3d = 2x + 2y + 2z + 2t \Leftrightarrow a + b + c + d = \frac{2}{3}(x + y + z + t).$$

$$a = \frac{2y+2z+2t-4x}{3},\ b = \frac{2x+2z+2t-4y}{3},\ c = \frac{2x+2y+2t-4z}{3},\ d = \frac{2x+2y+2z-4t}{3}.$$

Inegalitatea inițială este echivalentă cu inegalitatea:

$$\frac{2y+2z+2t-4x}{6x} + \frac{2x+2z+2t-4y}{6y} + \frac{2x+2y+2t-4z}{6z} + \frac{2x+2y+2z-4t}{6t} \geq \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{t}{x} + \frac{x}{t} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{t}{y} + \frac{y}{t} + \frac{t}{z} + \frac{z}{t} - 8 \geq 4.$$

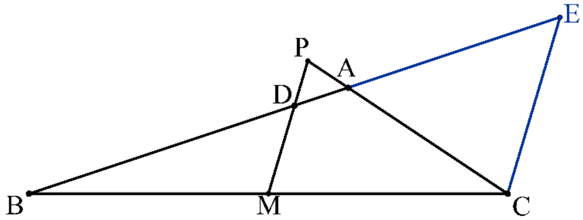
Aplicăm inegalitatea $a + \frac{1}{a} \geq 2$, adevărată pentru orice număr real pozitiv a, și obținem

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{t}{x} + \frac{x}{t}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{t}{y} + \frac{y}{t}\right) + \left(\frac{t}{z} + \frac{z}{t}\right) - 8 \geq 6 \cdot 2 - 8 = 4.$$

Ultima inegalitate este adevărată pentru orice numere reale pozitive $, y, z, t$.

8.7. Fie triunghiul ABC cu $AB > AC$, $m(\measuredangle BAC) = 150^\circ$. Punctul M este mijlocul laturii BC, punctul D este situat pe latura AB astfel, încât $BD = AD + AC$, iar $AC \cap DM = \{P\}$. Calculați măsura unghiului APD.

Rezolvare. Pe dreapta AB depunem un punct E, astfel încât $AE = AC$, $A \in (DE)$. Atunci triunghiul ACE este isoscel cu baza CE.



$m(\measuredangle CAE) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, iar

$m(\measuredangle ACE) = m(\measuredangle AEC) = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Observăm că $DE = AD + AE = AD + AC = BD$, adică D este mijlocul segmentului BE.

Cum M este mijlocul segmentului BC, atunci DM este linie mijlocie a triunghiului BCE și $DM \| CE$.

Considerăm paralelele DP și CE intersectate de secanta CP, atunci unghiurile alterne interne APD și ACE sunt congruente, adică $m(\measuredangle APD) = m(\measuredangle ACE) = 75^\circ$.

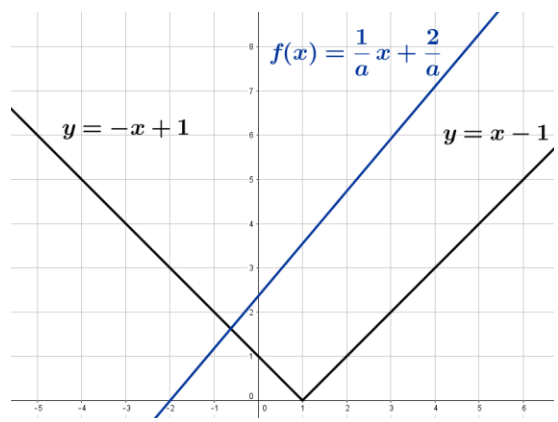
Răspuns: $\boldsymbol{m(\measuredangle APD) = 75^\circ}$.

8.8. Determinați toate valorile parametrului real a, astfel încât pentru fiecare dintre ele, ecuația $x + 2 = a|x - 1|$ are o soluție reală unică.

Rezolvare. 1. Fie $a = 0$, atunci $x = -2$ – singura soluție reală a ecuației date.

2. Fie $a \neq 0$. Împărțim ambele părți ale ecuației date la a. Obținem ecuația echivalentă $\frac{1}{a}(x + 2) = |x - 1|$. Vom aplica metoda grafică. Vom trasa în același sistem de coordonate graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{a}(x + 2) = \frac{1}{a} \cdot x + \frac{2}{a}$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = |x - 1| = \begin{cases} -x + 1, \text{dacă } x < 1, \\ x - 1, \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$

Graficul funcției g reprezintă reuniunea semidreptelor de ecuații $y = -x + 1$ și $y = x - 1$ cu originile în punctul cu coordonatele $(1; 0)$.



Observăm că pentru orice valoare fixă nenulă a lui a graficul funcției f este o dreaptă ce trece prin punctul cu coordonatele $(-2; 0)$ (pentru orice valoare a lui a). Dreapta respectivă are panta $m = \frac{1}{a}$. Ecuația dată va avea o singură soluție reală dacă și numai dacă graficele funcțiilor f și g au un singur punct de intersecție.

2.1. Fie $a > 0$, atunci este necesar și suficient ca panta $\frac{1}{a} \geq 1 \Leftrightarrow a \in (0; 1]$.

2.2. Fie $a < 0$, atunci este necesar și sufficient ca panta $\frac{1}{a} < -1 \Leftrightarrow a \in (-1; 0)$.

Făcând o sinteză a rezultatelor obținute obținem că $a \in (-1; 1]$.

Răspuns: $\boldsymbol{a \in (-1; 1]}$.

Soluție 2.

1. Vom rezolva ecuația pe intervalele $x \in (-\infty, 1)$ și $x \in [1, +\infty)$
2. Pentru $x \in (-\infty, 1)$ avem $x - 1 < 0$ și obținem $x < 1$. În acest caz ecuația devine:
   $x + 2 = a|x - 1| \Leftrightarrow x + 2 = a(1 - x) \Leftrightarrow x + 2 = a - ax \Leftrightarrow (1 + a)x = a - 2.$

2.1. Pentru $a = -1$ obținem $0 \cdot x = -1 - 2 = -3 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

2.2. Pentru $a \neq -1$ obținem unica soluție $x = \frac{a-2}{a+1}$ și cum $x < 1$ obținem

$$\frac{a-2}{a+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{a+1-3}{a+1} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{a+1} < 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{a+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{a+1} > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1 \Leftrightarrow a \in (-1, +\infty).$$

Deci pentru $a > -1$ avem unica soluție $x = \frac{a-2}{a+1} = (1 - \frac{3}{a+1}) \in (-\infty, 1).$

3. Pentru $x \in [1, +\infty)$ avem $x - 1 \geq 0$ și obținem $x \geq 1$. În acest caz ecuația devine:
   $x + 2 = a|x - 1| \Leftrightarrow x + 2 = a(x - 1) \Leftrightarrow x + 2 = ax - a \Leftrightarrow (a - 1)x = a + 2.$

3.1. Pentru $a = 1$ obținem $0 \cdot x = 1 + 2 = 3 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

3.2. Pentru $a \neq 1$ obținem $x = \frac{a+2}{a-1}$ și cum $x \geq 1$ obținem

$\frac{a+2}{a-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{a-1+3}{a-1} \geq 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{a-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{a-1} \geq 0 \Leftrightarrow a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 1 \Leftrightarrow a \in (1, +\infty)$.

Determinăm valorile parametrului a pentru care soluțiile ecuației din enunț, obținute în 2.2. și 3.2. sunt egale.

$$\frac{a-2}{a+1} = \frac{a+2}{a-1} \Leftrightarrow \frac{a+1-3}{a+1} = \frac{a-1+3}{a-1} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{a+1} = 1 + \frac{3}{a-1} \Leftrightarrow -\frac{3}{a+1} = \frac{3}{a-1} \Leftrightarrow -\frac{3}{a+1} = -\frac{3}{1-a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{a+1} = \frac{3}{1-a} \Leftrightarrow a + 1 \Leftrightarrow 1 - a \Leftrightarrow a \Leftrightarrow -a \Leftrightarrow a = 0 \notin (1, +\infty).$$

Făcând o sinteză a celor obținute avem $a \in (-1, 1]$. **Răspuns:** $\boldsymbol{a \in (-1; 1]}$**.**