OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 2 martie 2024, Clasa a VIII–a
Soluții

8.1. Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{x \in Z \middle| \frac{x^{10}+3}{2x^2} \in \mathrm{Z}\right\}, \quad B = \left\{x \in Z \middle| \frac{x^{10}+2}{3x^2} \in \mathrm{Z}\right\}.$$

Arătați că $A = B$.

Rezolvare. Fie $x \in Z^*$. Atunci $\frac{x^{10}+3}{2x^2} \in \mathrm{Z} \Rightarrow 2\cdot\frac{x^{10}+3}{2x^2} \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow \frac{x^{10}+3}{x^2} \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow x^5 + \frac{3}{x^2} \in \mathrm{Z}$. Cum din $x \in Z^* \Rightarrow x^5 \in \mathrm{Z}$, atunci $x^5 + \frac{3}{x^2} \in \mathrm{Z} \Rightarrow \frac{3}{x^2} \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow x^2|3 \Leftrightarrow x \in \{-1, +1\}$. Prin verificare obținem că
$\frac{x^{10}+3}{2x^2} = 2 \in \mathrm{Z}$ pentru $x \in \{-1, +1\}$. Deci $A = \{-1, +1\}$.
În mod analogic procedăm pentru aflarea mulțimii B.
Fie $x \in Z^*$. Atunci $\frac{x^{10}+2}{3x^2} \in \mathrm{Z} \Rightarrow 3\cdot\frac{x^{10}+2}{3x^2} \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow \frac{x^{10}+2}{x^2} \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow x^5 + \frac{2}{x^2} \in \mathrm{Z}$. Cum din $x \in Z^* \Rightarrow x^5 \in \mathrm{Z}$, atunci $x^5 + \frac{2}{x^2} \in \mathrm{Z} \Rightarrow \frac{2}{x^2} \in \mathrm{Z} \Leftrightarrow x^2|2 \Leftrightarrow x \in \{-1, +1\}$. Prin verificare obținem că $\frac{x^{10}+2}{3x^2} = 1 \in \mathrm{Z}$ pentru $x \in \{-1, +1\}$. Deci $B = \{-1, +1\}$. Deci $A = B$.

8.2. Numerele reale pozitive x, y satisfac inegalitatea $13x + 36y \leq 468$.

Demonstrați că $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 7$. Pentru ce valori ale lui x și y are loc egalitatea?

Rezolvare.

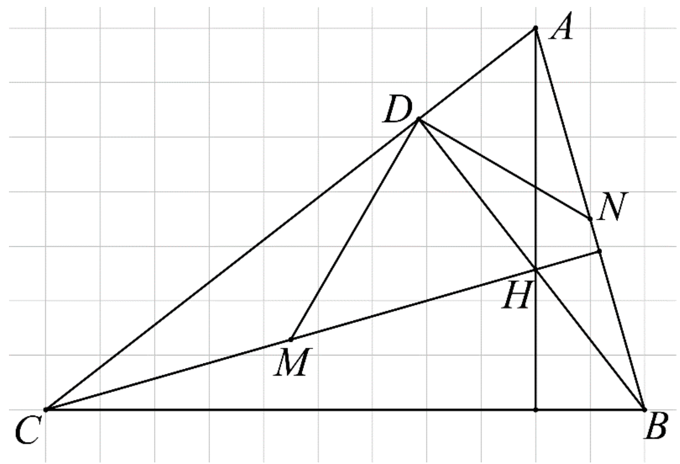
$$13x + 36y \leq 468 \Leftrightarrow \frac{x}{36} + \frac{y}{13} \leq 1. \quad (*)$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7\left(\frac{\sqrt{x}}{7} + \frac{\sqrt{y}}{7}\right) = 7\left(\sqrt{\frac{x}{49}} + \sqrt{\frac{y}{49}}\right) = 7\left(\sqrt{\frac{x}{36}\cdot\frac{36}{49}} + \sqrt{\frac{y}{13}\cdot\frac{13}{49}}\right) \leq 7\left(\frac{\frac{x}{36}+\frac{36}{49}}{2} + \frac{\frac{y}{13}+\frac{13}{49}}{2}\right) =$$

$$= 7\left(\frac{\frac{x}{36}+\frac{y}{13}+\frac{36}{49}+\frac{13}{49}}{2}\right) = 7\left(\frac{\frac{x}{36}+\frac{y}{13}+1}{2}\right) \leq 7\left(\frac{1+1}{2}\right) = 7$$

Egalitatea în relație are loc, dacă $\frac{x}{36} = \frac{36}{49}$ și $\frac{y}{13} = \frac{13}{49}$, adică pentru $x = \frac{36^2}{49}$ și $y = \frac{13^2}{49}$.

8.3. În triunghiul ascuțitunghic ABC punctul H este ortocentru, $BH \cap [AC] = \{D\}$, punctul M este mijlocul segmentului CH, iar punctul N este mijlocul segmentului AB. Demonstrați că dreptele DM și DN sunt perpendiculare.



Rezolvare. Segmentul DM este mediana triunghiului dreptunghic CDH, deci $[DM] \equiv [CM] \equiv [HM]$, adică triunghiul CDM este isoscel.

Fie $m(\measuredangle DCM) = m(\measuredangle CDM) = \varphi$, atunci $m(\measuredangle HDM) = 90^\circ - \varphi$.

Cum H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci $m(\measuredangle DAN) = 90^\circ - m(\measuredangle DCM) = 90^\circ - \varphi$.

Segmentul DN este mediana triunghiului dreptunghic ABD și $[DN] \equiv [AN] \equiv [BN]$, adică triunghiul ADN este isoscel.

$m(\measuredangle ADN) = m(\measuredangle DAN) = 90^\circ - \varphi$,

$m(\measuredangle HDN) = 90^\circ - (90^\circ - \varphi) = \varphi$.

Din $m(\measuredangle MDN) = m(\measuredangle HDM) + m(\measuredangle HDN) = 90^\circ - \varphi + \varphi = 90^\circ$, rezultă că dreptele DM și DN sunt perpendiculare.

8.4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y - z = \frac{3}{2}, \\ x^2 + 4y^2 + z^2 = \frac{3}{4}. \end{cases}$

Rezolvare.

$$(x + 2y - z)^2 = \frac{9}{4} \iff x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 2xz = \frac{9}{4} \iff 4xy - 4yz - 2xz = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$2(x^2 + 4y^2 + z^2) = \frac{3}{2} \iff 2x^2 + 8y^2 + 2z^2 = \frac{3}{2}.$$

Astfel obținem

$$2x^2 + 8y^2 + 2z^2 = 4xy - 4yz - 2xz \iff 2x^2 + 8y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz + 2xz = 0 \iff$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4y^2 + 4yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 = 0 \iff (x - 2y)^2 + (2y + z)^2 + (x + z)^2 = 0$$

$$\iff \begin{cases} (x - 2y)^2 = 0 \\ (2y + z)^2 = 0 \\ (x + z)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y. \\ z = -x \end{cases}$$

Din prima ecuație a sistemului obținem $x + 2y - z = \frac{3}{2} \iff 2y + 2y + 2y = \frac{3}{2} \iff 6y = \frac{3}{2} \iff y = \frac{1}{4}$

Astfel obținem: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = -\frac{1}{2}$. Verificarea imediată arată că aceste numere satisfac ecuațiile sistemului.