Clasa a VIII – a
Soluții. Ziua a doua.

8.5. Determinați toate perechile ordonate de numere naturale (x, y) care verifică egalitatea

$$|\,4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - 2y + 56\,| + 3x + 2y = 56.$$

Soluție. Egalitatea din enunț se scrie astfel: $|(2x - y)^2 - (3x + 2y - 56)| = -(3x + 2y - 56)$ .Notăm $m = 3x + 2y - 56,\ 2x - y = n$. Obținem $-m = |\,n^2 - m\,| \geq 0 \implies m \leq 0 \implies n^2 - m \geq 0.$

Rezulă că $n^2 - m = -m \implies n = 0 \implies 2x - y = 0 \implies y = 2x.$ Trecând la variabila x, obținem egalitatea $|56 - 7x| = 56 - 7x \iff 56 - 7x \geq 0 \iff x \leq 8$. Cum $x \in \mathbf{N},\ x \leq 8$, $y = 2x$, obținem $S = \{(x, y)\} = \{\,(x,\ 2x)\ |\ x \in \{0, 1, 2, \dots, 8\,\}\} = \{\,(0, 0),\ (1, 2),\ (2, 4), \dots, (8, 16)\}$, în total 9 perechi de numere.

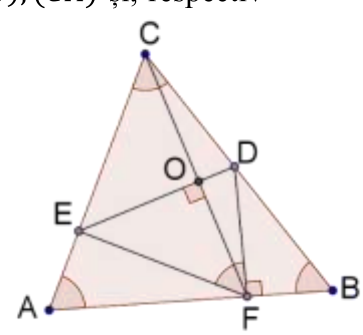
8.6. Determinați toate perechile ordonate de numere prime (m, n) astfel, încât numerele $2m + n$, $m + 2n$ și $m + n - 28$ sunt numere prime.

Soluție. Deoarece numerele $2m + n,\ m + 2n$ sunt prime, rezultă că numerele prime *m* și *n* sunt ambele impare. Atunci numerele $2m + n$ și $m + 2n$ sunt numere prime impare, iar suma lor $(2m + n) + (m + 2n) = 3 \cdot (m + n)$ este un număr par. Cum 3 este un număr impar, rezultă că numărul $m + n$ este par. Atunci numărul $m + n - 28$ este par și prim, adică $m + n - 28 = 2 \iff m + n = 30$. Prin atribuire de valori depistăm următoarele 6 perechi ordonate de numere prime impare cu suma egală cu 30: (7,23), (11, 19), (13,17), (17,13), (19,11), (23,7). In tabel sunt inserate valorile numerelor $2m + n$ și $m + 2n$ pentru fiecare dintre cele 6 perechi:

$(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$	(7,23)	(11, 19)	(13,17)	(17,13)	(19,11)	(23,7)
$\boldsymbol{2m + n}$	37	41	43	47	49	53
$\boldsymbol{m + 2n}$	53	49	47	41	41	37

Din tabel rezultă că perechile (11, 19) și (19,11) nu satisfac enunțul problemei. Celelalte patru perechi rămase (7,23), (13,17), (17,13), (23,7) reprezintă toate perechile ordonate de numere prime care satisfac enunțul problemei.

8.7. Fie triunghiul echilateral *ABC*. Punctele *D*, *E* și *F* sunt situate pe laturile $(BC), (CA)$ și, respectiv (AB) astfel, încât dreptele *DF* și *AB* sunt perpendiculare, iar dreapta *DE* este mediatoarea segmentului *CF*. Aflați măsura în grade a unghiului *DEF*.



Soluție. Cum punctele *D* și *E* sunt situate pe mediatoarea segmentului (CF), rezultă că $DC = DF$ și $EC = EF$ (vezi figura).

Obținem congruența triunghiurilor *EDC* și *EDF*, de unde avem următoarele egalități $m(\angle ACB) = m(\angle ECD) = m(\angle EFD) = 60^0$.

Cum triunghiul *BFD* este dreptunghic în *F*, iar triunghiul *CDF* este isoscel cu $DC = DF$, atunci obținem relațiile: $m(\angle ABC) = m(\angle FBD) = 60^0$, $m(\angle BDF) = 30^0$,

$$m(\angle CDF) = 150^0,\ m(\angle DCF) = m(\angle DFC) = 15^0,\ m(\angle EDF) = 75^0.$$

Astfel obținem $m(\angle DEF) = 180^0 - m\,(\angle\, EFD) - m\,(\angle\, EDF) = 45^0$.

8.8. 16 cutii sunt numerotate cu numere de la 0 la 15. Se iau 2020 de bile și pe fiecare bilă se scrie câte un număr natural de la 0 la 15 inclusiv. Fiecare bilă se pune în cutia cu același număr ca și pe bilă. După aceasta din cutiile cu numerele 1, 2 și 3 se scot toate bilele, de pe aceste bile se șterge numărul scris inițial și în locul lui se scrie numărul 0, apoi toate aceste bile se pun în cutia 0. Analog, din cutiile cu numerele 12, 13 și 14 se scot toate bilele, de pe aceste bile se șterge numărul scris inițial și în locul lui se scrie numărul 15, apoi toate aceste bile se pun în cutia 15. În rezultatul acestor schimbări media aritmetică a tuturor numerelor scrise inițial pe bile s-a micșorat cu $\frac{1}{10}$. Arătați că există cel puțin două cutii, pentru care diferența pozitivă a numerelor inițiale de bile din ele era mai mare sau egală cu 34.

Soluție. Pentru orice $k \in \{0,1,2,\dots,15\}$ notăm cu x_k numărul bilelor cu numărul *k* scris pe ele. Atunci media aritmetică a tuturor numerelor scrise inițial pe bile a fost egal cu

$$m_{init} = \frac{0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + \cdots + 12 \cdot x_{12} + 13 \cdot x_{13} + 14 \cdot x_{14} + 15 \cdot x_{15}}{2020},$$

iar după producerea schimbărilor, media aritmetică a numerelor scrise a devenit egală cu

$$m_{nou} = \frac{0 \cdot (x_0 + x_1 + x_2 + x_3) + 4 \cdot x_4 + \cdots + 11 \cdot x_{11} + 15 \cdot (x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15})}{2020}.$$

Diferența acestor două medii este egală cu $\frac{1}{10}$, adică:

$$m_{init} - m_{nou} = \frac{x_1 - x_{14} + 2 \cdot (x_2 - x_{13}) + 3 \cdot (x_3 - x_{12})}{2020} = \frac{1}{10}.$$

Astfel, am obținut egalitatea

$$(x_1 - x_{14}) + (x_2 - x_{13}) + (x_2 - x_{13}) + (x_3 - x_{12}) + (x_3 - x_{12}) + (x_3 - x_{12}) = 202.$$

În ultima egalitate toate parantezele reprezintă numere întregi, iar suma celor 6 paranteze este egală cu 202. Rezultă că există cel puțin o paranteză care este mai mare decât $\frac{202}{6} = 33,(6)$.

Deci, există cel puțin două cutii pentru care diferența pozitivă a numărului inițial de bile din ele este mai mare sau egală cu 34.