Clasa a VIII-a
Soluții. Prima zi.

8.1. Numerele reale p și q satisfac simultan relațiile:

$$2p^2-3p-1=0, \qquad q^2+3q-2=0, \qquad p\cdot q\neq 1\,.$$

Determinați valoarea numerică a expresiei

$$E(p,q)=\frac{23p^4+125q^4}{17p^4-q^4}.$$

Soluție. Conform relațiilor din enunț constatăm că $pq\neq 0$. Atunci sunt juste următoarele egalități:

$$q(2p^2-3p-1)+p(q^2+3q-2)=0 \iff 2p^2q-3pq-q+pq^2+3pq-2p=0 \iff$$

$$pq(2p+q)-(2p+q)=0 \iff (pq-1)\cdot(2p+q)=0\,.$$

Cum $p\cdot q\neq 1$, rezultă că sunt juste egalitățile $2p+q=0 \iff q=-2p$. Atunci obținem

$$E(p,q)=\frac{23p^4+125\cdot(-2)^4p^4}{17p^4-(-2)^4p^4}=\frac{(23+125\cdot 16)\cdot p^4}{(17-16)\cdot p^4}=2023\,.$$

Conform condițiilor din enunț valoarea numerică a expresiei $E(p,q)$ este egală cu 2023.

8.2. Pe tablă este scris un număr natural x. Înaintea numărului x scriem cifrele 20, iar după el scriem cifrele 23 (de exemplu, dacă $x=1957$, atunci se obține numărul 20195723). Determinați cel mai mic număr natural x cu proprietatea că numărul obținut este divizibil prin 2023.

Soluție. Dacă $x=0$, atunci $20023=2023\cdot 9+1816$, adică 20023 nu este divizibil prin 2023.

Fie numărul $x\in\{1,2,\dots,9\}$. Atunci avem

$$\overline{20x23}=20000+\overline{x00}+23=2023\cdot 10-230+x\cdot 100+23=2023\cdot 10+x\cdot 100-207.$$

Cum $-107\leq x\cdot 100-207<2023$ și $x\cdot 100-207\neq 0$ resultă că oricare ar fi cifra $x\in\{1,2,\dots,9\}$ numărul $\overline{20x23}$ nu este divizibil prin 2023.

Fie numărul $x=\overline{mn}=10m+n$, $m\in\{1,2,\dots,9\}$, $n\in\{0,1,2,\dots,9\}$. Atunci avem

$$\overline{20x23}=\overline{20mn23}=200000+\overline{mn00}+23=202300-2300+\overline{mn}\cdot 100+2023-2000=$$

$$2023\cdot 101+(\overline{mn}-43)\cdot 100.$$

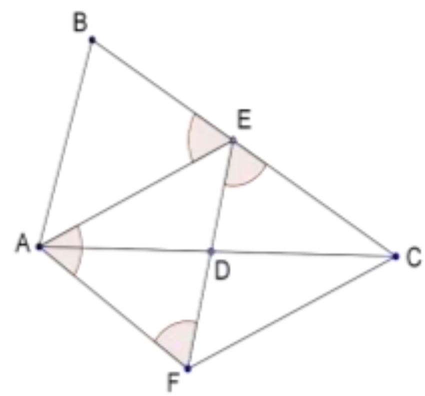
Avem $2023=7\cdot 17^2$, iar $100=2^2\cdot 5^2$. Rezultă că numerele naturale 2023 și 100 sunt prime între ele.

Dacă $10\leq\overline{mn}<43$, atunci $\overline{mn}-43$ nu poate fi divizibil cu 2023, deoarece $0<43-\overline{mn}<2023$. Atunci și numărul $\overline{20x23}$ nu este divizibil prin 2023.

Dacă $\overline{mn}=43$, atunci $204323=2023\cdot 101$. Astfel, $x=43$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea din enunț.

8.3. În triunghiul ABC punctul D este mijlocul laturii AC, iar E este un punct interior al laturii BC astfel, încât unghiurile BEA și CED sunt congruente. Aflați valoarea numerică a raportului $\frac{AE}{DE}$.

Soluție. Pe prelungirea semidreptei $(ED$ luăm punctul F astfel, încât $DE = DF$ (vezi figura).



Cum $AD = DC$, rezultă că patrulaterul $AECF$ este un paralelogram. Atunci dreptele AE și CF sunt paralele, precum sunt paralele și dreptele AF și BC. Atunci obținem

$$m(\angle BEA) = m(\angle EAF) = \alpha = m(\angle CEF) = m(\angle AFE)\,.$$

Rezultă că triunghiul AEF este isoscel cu $AE = FE$. Cum $EF = 2 \cdot DE$, avem că $AE = 2 \cdot DE \iff \frac{AE}{DE} = 2$.

8.4. Un tabel dreptunghiular are 6 linii și 7 coloane și include 42 de pătrățele de dimensiuni 1×1. În fiecare pătrățel se scrie unul dintre numerele 0 sau 1 astfel, încât pentru orice două linii diferite sumele numerelor, scrise pe ele, sunt diferite, iar pentru orice două coloane sumele numerelor, scrise pe ele, sunt egale. Aflați suma numerelor scrise în prima coloană.

Soluție. Cum sumele numerelor de pe linii sunt diferite, rezultă că suma a 7 numere (de 0 sau 1) scrise într-o linie poate lua doar 8 valori, și anume: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Deoarece avem doar 6 linii, atunci două valori dintre cele opt lipsesc. Notăm valorile ce lipsesc cu x și y. Atunci suma tuturor numerelor din tabel se scrie astfel:

$$S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - (x + y) = 28 - (x + y) = 7k,$$

unde $k \in \mathbf{N}$ este suma numerelor din orice coloană, inclusiv din prima.

Cum $x + y = 28 - 7k = 7 \cdot (4 - k)$, rezultă că suma $x + y$ este un multiplu al lui 7, fapt, care arată că $x + y = 7$, iar $k = 3$.

Vom arăta că un astfel de tabel este posibil. În continuare este arătat un exemplu de completare a tabelului cu 0 și 1, care satisface condițiile enunțului.

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1