РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 5 марта 2023 года, VIII класс

Схемы оценивания

8.5 Найдите все упорядоченные пары натуральных чисел (x, y), которые удовлетворяют равенству $|\, 4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - 2y + 56 \,| + 3x + 2y = 56$.

№	Этапы решения	Баллы
1.	Получил равенство $|\,(2x-y)^2 - (3x+2y-56)\,| = -(3x+2y-56)$.	1 балл
2.	Обозначил $m = 3x + 2y - 56,\ 2x - y = n$ и получил $-m = |\,n^2 - m\,| \geq 0$.	1 балл
3.	За вывод $m \leq 0 \implies n^2 - m \geq 0$.	1 балл
4.	Получил соотношения $n^2 - m = -m \Rightarrow n = 0 \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$.	1 балл
5.	Плучил $|\ 56 - 7x\ | = 56 - 7x \iff 56 - 7x \geq 0 \iff x \leq 8$.	1 балл
6.	Для $x \in N$ выводит, что $x \leq 8,\ y = 2x$.	1 балл
7.	Написал множество решений $S = \{\ (x,\ 2x)\ |\ x \in \{0, 1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ 8\}$ или $S = \{\ (0,0), (1,2), (2,4),\ .\ .\ .\ , (8,16)\ \}$.	1 балл
	Всего	7 баллов

8.6 Найдите все упорядоченные пары простых чисел (m, n) таких, что $2m + n,\ m + 2n$ и $m + n - 28$ являются простыми числами.

№	Этапы решения	Баллы
1.	Показал, что m и n являются нечетными простыми числами.	1 балл
2.	Указывает, что $2m + n$ и $m + 2n$ являются нечетными простыми числами, а $(2m + n) + (m + 2n) = 3 \cdot (m + n)$ - четное число.	1 балл
3.	Показывает, что число $m + n$ четно, а число $m + n - 28$ четное и простое.	1 балл
4.	Получил $m + n = 30$.	1 балл
5.	Выявил 6 упорядоченных пар простых чисел, сумма которых равна 30.	1 балл
6.	Осуществил поверку всех полученных пар	1 балл
7.	Написал пары $(7,23), (13,17), (17,13),\ (23,7)$, которые удовлетворяют условиям задачи.	1 балл
	Всего	7 баллов

8.7 Пусть задан равносторонний треугольник ABC. Точки D, E и F расположены на сторонах $(BC), (CA)$ и (AB) соответственно так, что прямые DF и AB перпендикулярны, а прямая DE является серединным перпендикуляром отрезка CF. Найдите градусную величину угла DEF.		
№	Этапы решения	Баллы
1.	Учитывая, что D и E расположенны на серединном перпендикуляре (CF), делает вывод, что $DC = DF$ и $EC = EF$, а прямые CF и DE перпендикулярны.	1 балл
2.	Доказывает равенство треугольников EDC и EDF.	1 балл
3.	Получил равенства $m\,(\angle ACB) = m\,(\angle ECD) = m\,(\angle EFD) = 60^0$.	1 балл
4.	Из прямоугольноготреугольника BFD получил равенства $m\,(\angle ABC) = m\,(\angle FBD) = 60^0, m\,(\angle BDF) = 30^0$.	1 балл
5.	Из равнобедренного треугольника CDF с $DC = DF$ получил равенства $m\,(\angle CDF) = 150^0,\ m\,(\angle DCF) = m\,(\angle DFC) = 15^0$.	1 балл
6.	Получил $m\,(\angle EFC) = m\,(\angle EFD) - m\,(\angle DFC) = 60^0 - 15^0 = 45^0$.	1 балл
7.	Поскольку прямые CF и DE перпендикулярны, делает вывод, что EOF является равнобедренным прямоугольным треугольником, и $m\,(\angle DEF) = 45^0$.	1 балл
	Всего	7 баллов

8.8. 16 коробок пронумерованы числами от 0 до 15. Берутся 2020 шара и на каждый шар записывается некоторое натуральное число от 0 до 15 включительно. Каждый пронумерованный шар помещается в коробку с тем же номером, что у шара. После этого из коробок с номерами 1, 2 и 3 извлекаются все шары, затем с этих шаров стирается записанное ранее число и вместо него записывается число 0, после чего все эти шары помещаются в коробку с номером 0. Аналогично, из коробок с номерами 12, 13 и 14 извлекаются все шары, затем с этих шаров стирается записанное ранее число и вместо него записывается число 15, после чего все эти шары помещаются в коробку с номером 15. В результате этих изменений среднее арифметическое всех первоначально записанных чисел на шарах сократилось на $\frac{1}{10}$. Покажите, что существуют по крайней мере две коробки, для которых положительная разность первоначального количества в них шаров больше или равна 34.		
№	Этапы решения	Баллы
1.	Для любого $k \in \{0,1,2,...,15\}$ обозначены через x_k количества шаров с записанными номерами k и вычислено среднее арифметическое всех первоначально записанных чисел на шарах m_{init} .	2 балла
2.	Вычислено среднее арифметическое всех записанных чисел на шарах m_{nou} после внесенных изменений	2 балла
3.	Вычислена разность и получено уравнение $m_{init} - m_{nou} = 0{,}1$ в виде $\frac{(x_1 - x_{14}) + (x_2 - x_{13}) + (x_2 - x_{13}) + (x_3 - x_{12}) + (x_3 - x_{12}) + (x_3 - x_{12})}{2020} = \frac{1}{10}$.	1 балл
4.	Указано, что каждая скобка последнего уравнения является целым числом, а их сумма равна 202.	1 балл
5.	Сделан вывод, что по крайней мере одна скобка из тех шести скобок не меньше 34 и, следовательно, существуют по крайней мере две коробки, для которых положительная разница первоначального количества в них шаров, больше или равна 34.	1 балл
	Всего	7 баллов