

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 4 марта 2023 г., VIII класс
Схемы оценивания

8.1. Действительные числа p и q удовлетворяют одновременно соотношениям

$$2p^2 - 3p - 1 = 0, \quad q^2 + 3q - 2 = 0, \quad p \cdot q \neq 1.$$
 Определите числовое значение выражения $E(p, q) = \frac{23p^4 + 125q^4}{17p^4 - q^4}$.

№	Этапы решения	Баллы
1.	Показывает, что $pq \neq 0$ и написал $q(2p^2 - 3p - 1) + p(q^2 + 3q - 2) = 0$	1 балл
2.	Получил $2p^2q - 3pq - q + pq^2 + 3pq - 2p = 0$.	1 балл
3.	Получил $pq(2p + q) - (2p + q) = 0$.	1 балл
4.	Получил $(pq - 1) \cdot (2p + q) = 0$.	1 балл
5.	Указывает, что из условия $p \cdot q \neq 1$ следует $2p + q = 0$ или $q = -2p$.	1 балл
6.	Получил $E(p, -2p) = \frac{23p^4 + 125 \cdot (-2)^4 p^4}{17p^4 - (-2)^4 p^4}$.	1 балл
7.	Получил $E(p, q) = 2023$.	1 балл
	Всего	7 баллов

8.2. На доске написано натуральное число x . Впереди числа x пишем цифры 20, а после него пишем цифры 23 (например, если $x = 1957$, тогда получаем число 20195723). Найдите наименьшее натуральное число x со свойством, что полученное число делится на 2023.

№	Этапы решения	Баллы
1.	Для $x = 0$ показывает, что 2023 не делит число 20023	1 балл
2.	Показывает, что 2023 не делит $\overline{20x23}$ при $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$	1 балл
3.	При $x = \overline{mn}$ получил $\overline{20x23} = \overline{20mn23} = 200000 + \overline{mn00} + 23$	1 балл
4.	Получил $\overline{20mn23} = 2023 \cdot 101 + (\overline{mn} - 43) \cdot 100$	1 балл
5.	Показывает, что 2023 и 100 взаимно просты	1 балл
6.	Показывает, что при $10 \leq \overline{mn} < 43$ число 2023 не делит $\overline{20mn23}$	1 балл
7.	При $\overline{mn} = 43$ получил $204323 = 2023 \cdot 101$ и вывод, что $x = 43$ является наименьшим натуральным числом, удовлетворяющим условию задачи.	1 балл
	Всего	7 баллов

8.3. В треугольнике ABC точка D – середина стороны AC , а E – внутренняя точка стороны BC такая, что углы BEA и CED равны. Найдите числовое значение отношения $\frac{AE}{DE}$.

№	Этапы решения	Баллы
1.	Строит на продолжении полупрямой (ED точку F с $DE = DF$	1 балл
2.	Доказывает, что четырехугольник $AECF$ является параллелограмом	1 балл
3.	Показывает, что $AE \parallel CF$ и $AF \parallel BC$	1 балл
4.	Получил $m(\angle BEA) = m(\angle EAF) = \alpha$	1 балл
5.	Получил $\alpha = m(\angle CEF) = m(\angle AFE)$	1 балл
6.	Доказал, что треугольник AEF равнобедренный и $AE = FE$	1 балл
7.	Из равенства $EF = 2 \cdot DE$ получил $\frac{AE}{DE} = 2$.	1 балл
	Всего	7 баллов

8.4. Прямоугольная таблица имеет 6 строк и 7 столбцов и включает 42 квадратика размерности 1×1 . В каждый квадратик записано одно из чисел 0 или 1 так, что для любых двух различных строк суммы чисел, записанных в данных строках, различны, а для любых двух столбцов суммы чисел, записанных в данных столбцах, равны. Найдите сумму чисел, записанных в первом столбце.

№	Этапы решения	Баллы
1.	С учетом, что суммы чисел, записанных в строках, не равны между собой, делает вывод, что сумма семи чисел, записанных в одной строке, может иметь 8 значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.	1 балл
2.	Учитывая, что таблица имеет лишь 6 строк, делает вывод, что два значения из тех восьми отсутствуют	1 балл
3.	Обозначает отсутствующие значения через x и y	1 балл
4.	Вычислил сумму всех чисел из таблицы: $S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - (x + y) = 28 - (x + y)$	1 балл
5.	Учитывая, что суммы чисел, записанных в столбцов, равны между собой, получает соотношения $x + y = 28 - 7k = 7 \cdot (4 - k)$, где $k \in N$ является суммой чисел из первого столбца.	1 балл
6.	Делает вывод, что сумма $x + y$ кратно семи, откуда $x + y = 7$, а $k = 3$.	1 балл
7.	Показывает пример распределения чисел 0 и 1 в квадратиках таблицы, удовлетворяющее условию задачи.	1 балл
	Всего	7 баллов