OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Ziua a doua, 5 martie 2023, Clasa a VIII–a
BAREM DE EVALUARE
Remarcă. Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

8.5. Determinați toate perechile ordonate (x, y) de numere naturale care verifică egalitatea

$$|\, 4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - 2y + 56 \,| + 3x + 2y = 56.$$

Nr. d/o	Etapele rezolvării	Punctaj
1.	Obține egalitatea $|\,(2x-y)^2 - (3x+2y-56)\,| = -(3x+2y-56)$.	1 p.
2.	Notează $m = 3x + 2y - 56,\ 2x - y = n$ și obține $-m = |\,n^2 - m\,| \geq 0$.	1 p.
3.	Pentru concluzia $m \leq 0 \implies n^2 - m \geq 0$.	1 p.
4.	Obține relațiile $n^2 - m = -m \implies n = 0 \implies 2x - y = 0 \implies y = 2x$.	1 p.
5.	Obține $|\ 56 - 7x\ | = 56 - 7x \iff 56 - 7x \geq 0 \iff x \leq 8$.	1 p.
6.	Pentru $x \in N$ decide că $x \leq 8$, $y = 2x$.	1 p.
7.	Scrie mulțimea soluțiilor $S = \{\ (x,\ 2x)\ |\ x \in \{0, 1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ 8\}$ sau $S = \{\ (0,0), (1,2), (2,4),\ .\ .\ .\ , (8,16)\ \}$.	1 p.
	Total	7 p.

8.6 Determinați toate perechile ordonate (m, n) de numere prime astfel, încât numerele $2m + n$, $m + 2n$ și $m + n - 28$ sunt numere prime .

Nr. d/o	Etapele rezolvării	Punctaj
1.	Arată că m și n sunt numere prime impare.	1 p.
2.	Apreciază că numerele $2m + n$ și $m + 2n$ sunt numere prime impare, iar $(2m + n) + (m + 2n) = 3 \cdot (m + n)$ este un număr par.	1 p.
3.	Arată că numărul $m + n$ este par, iar numărul $m + n - 28$ este par și prim.	1 p.
4.	Obține $m + n = 30$.	1 p.
5.	Depistează 6 perechi ordonate de numere prime impare cu suma egală cu 30.	1 p.
6.	Efectuiază verificarea celor 6 perechi ordonate de numere prime impare obținute.	1 p.
7.	Scrie perechile $(7,23), (13,17), (17,13)$, $(23,7)$ care satisfac enunțul problemei.	1 p.
	Total	7 p.

8.7 Fie triunghiul echilateral ABC. Punctele D, E și F sunt situate pe laturile $(BC), (CA)$ și, respectiv (AB) astfel, încât dreptele DF și AB sunt perpendiculare, iar dreapta DE este mediatoarea segmentului CF. Aflați măsura în grade a unghiului DEF.		
Nr. d/o	Etapele rezolvării	Punctaj
1.	Pentru concluzia că dacă punctele D și E sunt situate pe mediatoarea segmentului (CF), atunci $DC = DF$ și $EC = EF$, iar dreptele CF și DE sunt perpendiculare.	1 p.
2.	Demonstrează congruența triunghiurilor EDC și EDF.	1 p.
3.	Obține egalitățile $m\,(\angle ACB) = m\,(\angle ECD) = m\,(\angle EFD) = 60^0$.	1 p.
4.	Din triunghiul BFD, dreptunghic în F, obține relațiile $m\,(\angle ABC) = m\,(\angle FBD) = 60^0, m\,(\angle BDF) = 30^0$.	1 p.
5.	Din triunghiul isoscel CDF cu $DC = DF$ obține relațiile $m\,(\angle CDF) = 150^0$, $m\,(\angle DCF) = m\,(\angle DFC) = 15^0$.	1 p.
6.	Obține $m\,(\angle EFC) = m\,(\angle EFD) - m\,(\angle DFC) = 60^0 - 15^0 = 45^0$.	1 p.
7.	Cum dreptele CF și DE sunt perpendiculare, rezultă că triunghiul EOF este dreptunghic isoscel, iar $m\,(\angle DEF) = 45^0$.	1 p.
	Total	7 p.

8.8. 16 cutii sunt numerotate cu numere de la 0 la 15. Se iau 2020 de bile și pe fiecare bilă se scrie câte un număr natural de la 0 la 15. Fiecare bilă se pune în cutia cu același număr ca și pe bilă. După aceasta toate bilele din cutiile cu numerele 1, 2 și 3 se scot, de pe ele se șterge numărul scris inițial, apoi se scrie numărul 0 și bilele se pun deja în cutia 0. Analog, toate bilele din cutiile cu numerele 12, 13 și 14 se scot, de pe ele se șterge numărul scris inițial, apoi se scrie numărul 15 și bilele se pun deja în cutia 15. In rezultatul acestor schimbări media aritmetică a tuturor numerelor scrise inițial pe bile s-a micșorat cu $\frac{1}{10}$. Arătați că există cel puțin două cutii, pentru care diferența pozitivă a numerelor inițiale de bile din ele este mai mare sau egală cu 34.		
Nr. d/o	Etapele rezolvării	Punctaj
1.	Pentru orice $k \in \{0,1,2,\ldots,15\}$ notează cu x_k numărul bilelor cu numărul k scris pe ele și calculează media aritmetică m_{init} a tuturor numerelor scrise inițial pe bile.	2 puncte
2.	Calculează media aritmetică m_{nou} a numerelor scrise pe bile după producerea schimbărilor	2 puncte
3.	Calculează diferența și scrie egalitatea $m_{init} - m_{nou} = 0{,}1$ în forma $\frac{(x_1 - x_{14}) + (x_2 - x_{13}) + (x_2 - x_{13}) + (x_3 - x_{12}) + (x_3 - x_{12}) + (x_3 - x_{12})}{2020} = \frac{1}{10}$	1 punct
4.	Arată că fiecare paranteză este un număr întreg, iar suma celor șase numere este 202.	1 punct
5.	Pentru concluzia, că există cel puțin o paranteză cu valoarea cel puțin egală cu 34, fapt care implică existența a cel puțin două cutii, pentru care diferența pozitivă a numerelor inițiale de bile din ele este mai mare sau egală cu 34.	1 punct
	Total	7 puncte