

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a VIII-a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

8.1. Numerele reale p și q satisfac simultan relațiile $2p^2 - 3p - 1 = 0$, $q^2 + 3q - 2 = 0$, $p \cdot q \neq 1$. Determinați valoarea numerică a expresiei $E(p, q) = \frac{23p^4 + 125q^4}{17p^4 - q^4}$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Arată că $pq \neq 0$ și scrie egalitatea $q(2p^2 - 3p - 1) + p(q^2 + 3q - 2) = 0$.	1 punct
2.	Obține $2p^2q - 3pq - q + pq^2 + 3pq - 2p = 0$.	1 punct
3.	Obține $pq(2p + q) - (2p + q) = 0$.	1 punct
4.	Obține $(pq - 1) \cdot (2p + q) = 0$.	1 punct
5.	Condiția $p \cdot q \neq 1$ implică $2p + q = 0$ sau $q = -2p$.	1 punct
6.	Obține $E(p, -2p) = \frac{23p^4 + 125 \cdot (-2)^4 p^4}{17p^4 - (-2)^4 p^4}$.	1 punct
7.	Obține $E(p, q) = 2023$.	1 punct
Punctaj total		7 puncte

8.2. Pe tablă este scris un număr natural x . Înaintea numărului x scriem cifrele 20, iar după el scriem cifrele 23 (de exemplu, dacă $x = 1957$, atunci se obține numărul 20195723). Determinați cel mai mic număr natural x cu proprietatea că numărul obținut este divizibil prin 2023.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Pentru $x = 0$ arată că 2023 nu divide numărul 20023.	1 punct
2.	Arată că 2023 nu divide $\overline{20x23}$ pentru $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$.	1 punct
3.	Pentru $x = \overline{mn}$ obține $\overline{20x23} = \overline{20mn23} = 200000 + \overline{mn00} + 23$.	1 punct
4.	Obține $\overline{20mn23} = 2023 \cdot 101 + (\overline{mn} - 43) \cdot 100$.	1 punct
5.	Arată că numerele 2023 și 100 sunt relativ prime.	1 punct
6.	Arată că pentru $10 \leq \overline{mn} < 43$ numărul 2023 nu divide $\overline{20mn23}$.	1 punct
7.	Pentru $\overline{mn} = 43$ obține $204323 = 2023 \cdot 101$ cu concluzia că $x = 43$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea din enunț.	1 punct
Punctaj total		7 puncte

8.3. În triunghiul ABC punctul D este mijlocul laturii AC , iar E este un punct interior al laturii BC astfel, încât unghiurile BEA și CED sunt congruente. Aflați valoarea numerică a raportului $\frac{AE}{DE}$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Construiește pe prelungirea semidreptei (ED punctul F cu $DE = DF$).	1 punct
2.	Pentru concluzia că patrulaterul $AECF$ este un paralelogram.	1 punct
3.	Pentru concluziile $AE \parallel CF$ și $AF \parallel BC$.	1 punct
4.	Obține $m(\angle BEA) = m(\angle EAF) = \alpha$.	1 punct
5.	Obține $\alpha = m(\angle CEF) = m(\angle AFE)$.	1 punct
6.	Pentru concluzia că triunghiul AEF este isoscel cu $AE = FE$.	1 punct
7.	Din egalitatea $EF = 2 \cdot DE$ obține $\frac{AE}{DE} = 2$.	1 punct
Punctaj total		7 puncte

8.4. Un tabel dreptunghiular are 6 linii și 7 coloane și include 42 de pătrățele de dimensiuni 1×1 . În fiecare pătrățel se scrie unul dintre numerele 0 sau 1 astfel, încât pentru orice două linii diferite sumele numerelor, scrise pe ele, sunt diferite, iar pentru orice două coloane sumele numerelor, scrise pe ele, sunt egale. Aflați suma numerelor scrise în prima coloană.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Din faptul că sumele numerelor de pe linii sunt diferite, obține că suma a 7 numere scrise într-o linie poate lua 8 valori: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.	1 punct
2.	Din faptul că tabelul are doar 6 linii obține concluzia că două valori dintre cele opt lipsesc.	1 punct
3.	Notează valorile absente prin x și y .	1 punct
4.	Calculează suma tuturor numerelor din tabel: $S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - (x + y) = 28 - (x + y).$	1 punct
5.	Din faptul că sumele numerelor, scrise pe coloane, sunt egale, obține relația $x + y = 28 - 7k = 7 \cdot (4 - k)$, unde $k \in N$ este suma numerelor din prima coloană	1 punct
6.	Pentru concluzia că suma $x + y$ este un multiplu a lui 7, fapt care arată că $x + y = 7$, iar $k = 3$.	1 punct
7.	Arată un exemplu de distribuire a numerelor 0 și 1 în pătrățelele tabelului care satisface condițiile enunțului.	1 punct
Punctaj total		7 puncte