OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

A doua zi, 3 martie 2024, Clasa a VII–a

7.5. Un juvaer are o colecție de n pietre prețioase. Dacă cele mai grele trei pietre sunt retrase din colecția dată, atunci greutatea totală a tuturor pietrelor scade cu 34%. Dacă cele mai ușoare trei pietre sunt retrase din colecția dată, atunci greutatea totală a tuturor pietrelor scade cu 20%. Găsiți toate valorile posibile pentru n. Argumentați răspunsul.

Soluţie. Răspuns. n=11 sau n=12.

Să numim pietrele care nu sunt trei cele mai ușoare și nici trei cele mai grele în greutate *pietre medii*. Observăm că o piatră grea cântărește în medie $1/3 \cdot 34\,\% \sim 11{,}33\%$, iar o piatră ușoară cântărește în medie $1/3 \cdot 20\% \sim 6{,}66\%$$ din greutatea totală a colecției.

Pietrele medii cântăresc 46% din toate pietrele. Dacă nu avem mai puțin de 4 pietre de greutate medie, atunci greutatea lor totală nu este mai mare decât media greutății totale a 4 pietre grele. Dar $4 \cdot 1/3 \cdot 34\% \sim 45.33\% < 46\%$, ceea ce nu este suficient. Dacă avem nu mai puțin de 7 pietre de greutate medie, atunci greutatea lor totală nu este mai mică decât media greutății totale a 7 pietre ușoare. Dar $7 \cdot 1/3 \cdot 20\% \sim 46.66 > 46\%$, ceea ce este prea mult. Prin urmare, numărul de pietre de greutate medie poate fi doar 5 sau 6. Valori posibile de n: 11 sau 12.

Exemple în care astfel de valori sunt posibile:

n=11: 3 pietre cu greutatea 20/3, 5 pietre cu greutatea 46/5, 3 pietre cu greutatea 34/3 carate.

n=12: 3 pietre cântărind 20/3, 6 pietre cântărind 46/6, 3 pietre cântărind 34/3 carate.

A doua soluție. Fie că avem m pietre care nu sunt trei cele mai ușoare și nici trei cele mai grele. Să le numim de *greutate mijlocie*. Greutatea medie m a acestora este de 46\% din greutatea totală a tuturor pietrelor. Apoi, greutățile medii ale pietrelor ușoare, medii și grele ar trebui să fie în următoarea ordine: $20/3 < 46/m < 34/3$. Prin urmare,

$$4 < (46 \cdot 3)/34 < m < (46 \cdot 3)/20 < 7,$$

ceea ce înseamnă că m poate fi doar 5 sau 6. Numărul total de pietre prețioase din colecție ar putea fi 11 sau 12. Exemple că astfel de valori sunt posibile sunt prezentate în soluția anterioară.

7.6. Ion și Ana au inventat un joc cu 14 cartonașe. Fiecare cartonaș are o față albă, iar cealaltă față este vopsită în una din cele 7 culori ale curcubeului, câte două de fiecare culoare. Inițial, Ana aranjează cartonașele în mod arbitrar cu fețele albe în sus astfel încât Ion să nu vadă culorile lor. După aranjarea cartonașelor Ion începe jocul. La fiecare mișcare el alege două cartonașe, le întoarce cu fețele vopsite în sus și se uită la ele. Dacă cartonașele deschise au aceeași culoare, jocul se termină. Dacă nu, Ana întoarce ambele cartonașe cu fața albă în sus și Ion continuă jocul.

(a) Câte combinații de două culori poate vedea Ion după prima mișcare?
(b) Presupunând că Ion are o memorie perfectă, găsiți cel mai mic număr de mișcări după care el poate garanta terminarea jocului.

Soluţie.

(a) Răspuns: 28 de combinații.

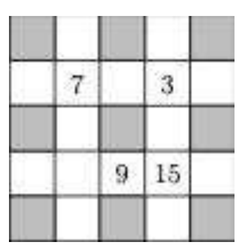
După prima mişcare, putem alege 7 perechi de cărți de aceeaşi culoare, sau două cărți de culori diferite. Prima carte poate fi una din 7 culori, a doua carte una din 6 culori. Numărul total de perechi de cărți de culori diferite va fi $7 \cdot 6/2 = 21$, deoarece am numărat fiecare pereche de 2 ori. Aceasta înseamnă că numărul de combinații de două cărți pe care Ivan le poate vedea după prima mutare va fi 7+21=28. Alternativ, toate aceste combinații pot fi enumerate.

(b) Răspuns: 5 mutări.

Ion nu poate termina întotdeauna jocul în 4 mutări. După primele trei mișcări, el poate dezvălui șase cărți diferite. La a patra mutare, el nu poate garanta că va încheia jocul. Mai există cel puțin o culoare ale cărei cărți nu le-a răsturnat. Aceasta înseamnă că culorile a două cărți deschise la a patra mutare pot să nu se potrivească.

Ion poate termina întotdeauna jocul în 5 mutări. Pentru a face acest lucru, el poate întoarce 8 cărți diferite în primele 4 ture. Cel puțin două cărți din opt se vor potrivi (conform principiului Dirichlet). Aceasta înseamnă că Ion poate întoarce aceste două cărți la a cincea mișcare și poate încheia jocul.

7.7. Două rânduri albe și două coloane albe se intersectează așa cum se arată în figură. Celulele lor conțin toate numerele întregi de la 1 până la 16 inclusiv, astfel încât sumele celor cinci numere din orice rând și orice coloană sunt egale. Pozițiile numerelor 3, 7, 9, 15 sunt cunoscute.



Găsiți toate tripletele posibile de numere care pot fi amplasate în celulele goale ale rândului de jos. Argumentați răspunsul.

Soluție. Răspuns. (2, 6, 11).

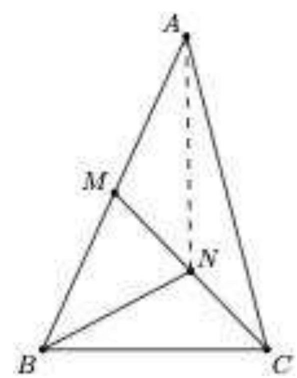
Fie x numărul de la intersecția rândului de jos și coloanei din stânga și s suma numerelor din fiecare rând și coloană. Însumez sumele a două rânduri și două coloane, obținem

$$4s = (1+2+ \ldots +16)+7+3+x+15,$$

pentru că am numărat toate numerele și am numărat celulele cu numerele 7, 3, x, 15 de 2 ori. Suma $1+2+ ... +16 = 16 \cdot 17/2 = 8 \cdot 17$ este divizibilă cu 4. Observăm că atunci $(7+3+x+15)$ trebuie să fie divizibil cu 4. Atunci $25+x$ este divizibil cu 4, ceea ce înseamnă că x trebuie să aibă un rest de 3 atunci când este împărțit la 4. Singurul număr rămas care care convine este $x=11$.

Obținem că $s =1/4\ (8\cdot17+7+3+11+15)=43$. Să notăm y și z celelalte două numere. Atunci $y+z+11+9+15=43$ și $y+z=8$. Dintre perechile posibile (1, 7), (2, 6), (3, 5), numai perechea (2, 6) este potrivită deoarece 3 și 7 au fost deja folosite.

7.8. În triunghiul □□□ punctul □ este mijlocul laturii □□, punctul □ este mijlocul segmentului □□ astfel, încât □ (∠□□□) = 45° și □□ = □□. Demonstrați că dreptele □□ și □□ sunt perpendiculare.



Observăm că triunghiurile AMN și BNC sunt congruente conform primului criteriu de congruență a triunghiurilor, deoarece $AM=BM=BN$, $\angle BMN = \angle BNM$ și $MN=CN$. Să notăm $\angle NBC = \angle BAN = x$, atunci $\angle BNC = 135^\circ - x$, $\angle BNM = \angle BMN = 45^\circ + x$, $\angle ABN = 90^\circ - 2x$. Prin urmare, $\angle ABC + \angle BAN = x+90^\circ-2x+x=90^\circ$, ceea ce înseamnă că dreptele AN și BC sunt perpendiculare.