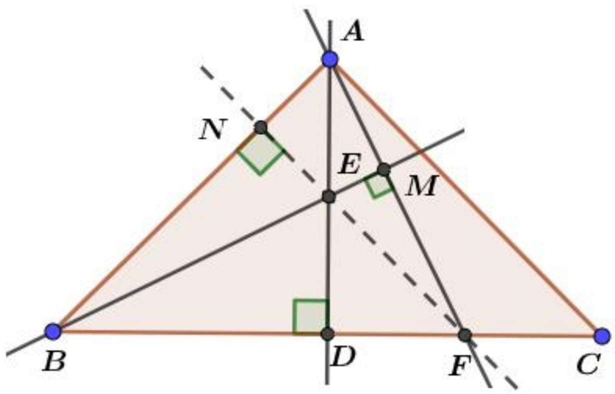
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 4 martie 2023, Clasa a VII–a
Soluții

7.5. În triunghiul ABC construim $AD \perp BC$, unde $D \in (BC)$. Punctele E și F sunt mijloacele segmentelor AD, și respectiv CD. Determinați măsura în grade a unghiului BAC, știind că $BE \perp AF$.

Soluție:

Fie $BE \cap AF = \{M\}$. Conform datelor problemei $m(\measuredangle BMF) = 90^\circ$. Deoarece în ΔBAF avem $AD \perp BF$, $BM \perp AF$ și $AD \cap BM = \{E\}$, rezultă că $FE \perp AB$. Fie $FE \cap AB = \{N\}$. Astfel, $m(\measuredangle BNF) = 90^\circ$.
Deoarece punctele E și F sunt mijloacele segmentelor AD, și respectiv CD, rezultă EF – linie mijlocie în ΔADC. Cum EF – linie mijlocie, rezultă $EF \parallel AC$, ceea ce implică $FN \parallel AC$.
Deoarece $FN \parallel AC$ și $BN \perp NF$, rezultă $BA \perp AC$. Astfel, $m(\measuredangle BAC) = 90^\circ$.



Răspuns: $m(\measuredangle BAC) = 90^\circ$.

7.6. Determinați toate cuburile perfecte de forma $\overline{abc}$, pentru care numerele de o cifră a, b și c sunt invers proporționale cu numerele $b + c - a$, $a + c - b$ și $a + b - c$.

Soluție:

Din datele problemei avem $a \neq 0$ și $a(b + c - a) = b(a + c - b) = c(a + b - c)$.

Din $a(b + c - a) = b(a + c - b)$ obținem $(a - b)(a + b - c) = 0$, ceea ce implică $a = b$ sau $c = a + b$. Vomstudia separat aceste cazuri.

1) Presupunem că $a = b$. Atunci relația $b(a + c - b) = c(a + b - c)$ capătă forma $c(b - c) = 0$, ceea ce implică $c = 0$ sau $b = c$. Astfel, numerele $\overline{abc}$ capătă forma $\overline{aa0}$ sau $\overline{aaa}$.

Deoarece $\overline{aa0} = a \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$, rezultă că cel mai mic număr a pentru care $\overline{aa0}$ este un cub perfect este $a = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$, ceea ce este imposibil deoarece a este cifră.

Deoarece $\overline{aaa} = a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 37$, rezultă că cel mai mic număr a pentru care $\overline{aaa}$ este un cub perfect este $a = 3^2 \cdot 37^2$, ceea ce este imposibil deoarece a este cifră.

2) Presupunem că $c = a + b$. Atunci relația $b(a + c - b) = c(a + b - c)$ capătă forma $b(a + b) = 0$, ceea ce implică $b = 0$. Astfel, numerele $\overline{abc}$ capătă forma $\overline{a0a}$.

Deoarece $\overline{a0a} = a \cdot 101$, rezultă că cel mai mic număr a pentru care $\overline{a0a}$ este cub perfect este $a = 101^2$, ceea ce este imposibil deoarece a -cifră.

Astfel, nu există cuburi perfecte $\overline{abc}$, pentru care cifrele a, b și c sunt invers proporționale cu numerele $b + c - a$, $a + c - b$ și $a + b - c$.

Răspuns: Nu există astfel de cuburi perfecte.

7.7. Determinați toate perechile de numere întregi m și n, care verifică relația $49n^2 - 7nm + 3m = 29$.

Soluție:

Din $49n^2 - 7nm + 3m = 29$, obținem $m = \frac{49n^2-29}{7n-3} = \frac{49n^2-9-20}{7n-3} = \frac{(7n-3)(7n+3)-20}{7n-3} = 7n + 3 - \frac{20}{7n-3}$.

Cum $m \in \mathbb{Z}$, rezultă $20 \vdots (7n - 3)$. Astfel, $7n - 3 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, -1, -2, -4, -5, -10, -20\}$, sau $7n \in \{4, 5, 7, 8, 13, 23, 2, 1, -1, -2, -7, -17\}$. De unde obținem $n \in \{-1, 1\}$.

Pentru $n = 1$, rezultă $m = 7 \cdot 1 + 3 - \frac{20}{7\cdot1-3} = 5$.

Pentru $n = -1$, rezultă $m = 7 \cdot (-1) + 3 - \frac{20}{7\cdot(-1)-3} = -2$.

Răspuns: $(n, m) \in \{(1,5); (-1,-2)\}$.

7.8. Numărul natural n și numerele prime p și q verifică relația $\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{q}}$. Determinați toate valorile posibile ale expresiei $E = p + q - 2n$.

Soluție:

Din $\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{q}}$, obținem $\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{q}+\sqrt{p}}{\sqrt{pq}}$, $3\sqrt{pq} = \sqrt{n}(2\sqrt{q} + \sqrt{p})$. Ridicând la pătrat ambele părți ale ultimei egalități, obținem $9pq = n(4q + p + 4\sqrt{pq})$. Deoarece $9pq \in \mathbb{N}$, rezultă $\sqrt{pq} \in \mathbb{N}$, ceea ce implică $p \cdot q$ – pătrat perfect. Deoarece, p și q sunt numere prime, și $p \cdot q$ – pătrat perfect, rezultă $p = q$. Pentru $p = q$, din $9pq = n(4q + p + 4\sqrt{pq})$ obținem $9p^2 = 9pn$, ceea ce implică $p = n$. Astfel, $n = p = q$, iar expresiei $E = p + q - 2n = 0$.

Răspuns: 0