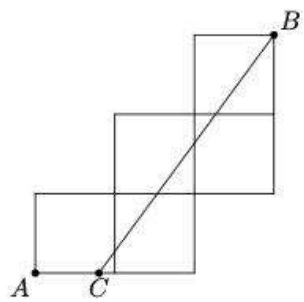
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

Prima zi, 2 martie 2024, Clasa a VII–a

7.1. Figura prezentată mai jos este formată din pătrate cu latura de 1 cm. Două vârfuri ale acestei figuri sunt marcate cu puncte *A* și *B*. Segmentul *BC* împarte aria acestei figuri în jumătate. Determinați lungimea segmentului *AC*.



Soluţie. Răspuns: *AC* = 2/3 cm.

Observăm că aria figurii este egală cu 5 □□^{2}. Atunci aria fiecărei părți, separate de segmentul AC este egală 2.5 □□^{2}. Vom adăuga părții din dreapta un pătrat de dimensiunea 1x1, astfel obținându-se un triunghi dreptunghic. Notăm cu D vârful din dreapta-jos.
Aria triunghiului *BCD* este egală cu 3.5 □□^{2}. Una din catetele lui are lungimea 3, deci aria triunghiului este egală cu 1/2 · *CD* · 3. Prin urmare, *CD*= 7/3 și *AC*=*AD* - *CD*= 2/3 cm.

7.2. Numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sunt aranjate aleator în formă de cerc.

(a) Demonstrați că putem găsi trei numere consecutive, a căror sumă este mai mare decât 15.

(b) Este adevărată afirmația problemei, dacă numerele sunt plasate pe o linie?

Soluţie. Observăm că numerele 7, 8, 9 nu pot fi situate alături sau să fie separate doar de unul din celelalte numere, deoarece în acest caz putem găsi trei numere vecine, suma cărora este este cel puțin 7+8+1 > 15. Prin urmare, numerele 7, 8, 9 sunt situate estfel, încât între ele să fie câte două din mulțimea {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Suma numerelor dintre 8 și 9 nu poate fi mai mare decât 6, deoarece 9+7 > 16. La fel, suma celor două numere dintre 7 și 9 nu poate fi mai mare decât 6, iar suma numerelor dintre 7 și 8 nu poate fi mai mare decât 7. Deci, suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 nu ar trebui să depășească 6 + 6 + 7 = 19. Dar 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Contradicție.

(b) Nu. Contraexemplu: 9, 4, 2, 7, 3, 5, 6, 1, 8.

A doua soluţie.

(a) Fie că numerele sunt scrise pe un cerc a_1, a_2, …, a_9. Să presupunem, prin contrariu, că suma oricăror trei numere consecutive nu este mai mare de 15:

a_1+a_2+a_3 ⩽15, a_2+a_3+a_4 ⩽15, … , a_8+a_9+a_1 ⩽ 15, a_9+a_1+a_2 ⩽ 15.

Însumăm toate inegalitățile și obținem 3(a_1+a_2+...+a_9) ⩽ 15 · 9. Mai mult, suma tuturor numerelor scrise pe cerc este egală cu a_1+a_2+... + a_9= 1+2+... +9 = 45. Atunci inegalitatea devine 135 = 3 · 45 ⩽ 15 · 9 = 135. Aceasta înseamnă că în toate inegalitățile trebuie să existe egalitate. Dar a_1+a_2+a_3=a_2+a_3+a_4=15 nu poate fi, deoarece a_1 ≠ a_4 este o contradicție.

(b) Nu. Contraexemplu: 9, 4, 2, 7, 3, 5, 6, 1, 8.

7.3. Găsiți restul împărțirii numărului $\square = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2023} + 2^{2024}$ la numărul 217.

Soluţie.

Observăm că 217=7 ·31. Puterile a două 2, 2^2, 2^3, … fiind împărțite la 7, dau rest

2, 4, 1, 2, 4, 1, … cu o perioadă de trei numere 2, 4, 1. Deoarece 2024=3 · 674 + 2, restul la împărțirea *S* la 7 va fi același cu restul numărului (2+4+1)·674 + 2+4, adică, 6.

Puterile a două 2, 2^2, 2^3, … fiind împărțite la 31, dau rest 2, 4, 8, 16, 1, 2, 4, … cu o perioadă de cinci numere 2, 4, 8, 16, 1. Deoarece 2024=5· 404 + 4, restul la împărțirea *S* la 31 va fi același cu restul numărului (2+4+8+16+1)· 404 + 2+4+8+16, adică 30.

Numărul *S* când este împărțit la 7 dă restul 6, iar când este împărțit la 31 dă restul 30. Observăm că *S*+1 trebuie să fie divizibil atât cu 7, cât și cu 31, ceea ce înseamnă că *S*+1 este divizibil cu 217. Prin urmare, *S* dă restul 216 atunci când este împărțit la 217.

7.4. Oamenii de știință au observat în laborator un mucegai neobișnuit. După expirarea a *n* zile, a *1/n* parte din tot mucegaiul își mărește de 3 ori suprafața pe care o acoperă. Inițial, mucegaiul acoperea 1 $\square\square^2$. După prima zi, tot mucegaiul și-a triplat suprafața și ocupă 3 $\square\square^2$. După a doua zi, o jumătate din mucegai și-a triplat suprafața și tot mucegaiul ocupă 6 $\square\square^2$, etc. După câte zile suprafața mucegaiului va depăși un metru pătrat?

Soluţie. Răspuns. 140 de zile.

După trei zile, mucegaiul acoperă o suprafață de (6-2)+2·3=10 $\square\square^2$. După patru zile, mucegaiul acoperă o suprafață de (10-2.5)+2.5 · 3 = 15 $\square\square^2$. După cinci zile: (15-3)+3 · 3 = 21 $\square\square^2$.

Șirul 1, 3, 6, 10, 15, 21, … se poate de scris ca 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2 +3+4+5, … Observăm că in ziua n suprafață la mucegaiul crește cu $(n+1)$ □□^{2} și la începutul zilei n este egal cu $n(n+1)/2$. Să demonstrăm că modelul observat va fi întotdeauna adevărat.

Să presupunem că la începutul zilei n mucegaiul acoperă suprafața $n(n+1)/2$. Apoi, la sfârșitul zilei n, $(n+1)/2$ din aria sa se va tripla, iar la sfârșitul zilei n întreaga suprafață a mucegaiul va fi egala cu

$$n(n+1)/2 - (n+1)/2 + (n+1)/2 \cdot 3 = n(n+1)/2 +(n+2)=(n+1)(n+2)/2,$$

și legitatea se respectă.

Pentru a afla când aria mucegaiului este mai mare de 1 □□^{2}, trebuie să găsim cel mai mic n pentru care $(n+1)(n+2)/2 > 10000$. Observăm că $141\cdot142 = 20022$. Prin urmare, după 140 de zile, zona mucegaiului va depăși 1 □□^{2}.

A doua soluție. Fie S aria mucegaiului la începutul zilei n. Apoi, la sfârșitul zilei, aria sa va fi

$$(S -S/n)+ S/n\ 3 = (n+2)/n \cdot S.$$

Aceasta înseamnă că din ziua n până în ziua n+1 aria va crește de $(n+2)/n$ ori. Deoarece începem cu o arie de 1 □□^{2}, la sfârșitul zilei n aria acoperită de mucegai va fi

$$(n+2)/n \cdot (n+1)/(n-1)\cdot n/(n-2) \cdot (n-1)/(n-3) \cdots 6/4 \cdot 5/3 \cdot 4/2 \cdot 3/1 \cdot 1\ □□^2 =(n+1)(n+2)/2,$$

unde am folosit faptul că aproape toate numerele se anulează atunci când sunt înmulțite.

Similar cu prima soluție, trebuie să găsim cel mai mic n pentru care $(n+1)(n+2)/2 > 10000$. Rețineți că $141\cdot142 = 20022$. Prin urmare, după 140 de zile, aria mucegaiului va depăși 1 □□^{2}.