OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a XII–a
Soluții

7.1. Numărul natural n și numărul real a verifica relația

$$n-\left(\frac{a-1}{a+1517}+\frac{\sqrt{|a|-2023}+\sqrt{2023-|a|}}{a-2023}\right)^{2024}=0.$$

Determinați ultima cifră a numărului n.

Soluție.

Din condițiile de existență a $\sqrt{|a|-2023}$ și $\sqrt{2023-|a|}$ obținem $|a|-2023 \geq 0$ și $2023-|a| \geq 0$, echivalente cu $|a| \geq 2023$ și $|a| \leq 2023$. Din ultimele două inecuații rezultă $|a|=2023$, sau $a=\pm 2023$.

Deoarece numitorul raportului $\frac{\sqrt{|a|-2023}+\sqrt{2023-|a|}}{a-2023}$ nu poate fi egal cu zero, obținem $a \neq 2023$.

Pentru $a=-2023$, obținem

$$n-\left(\frac{-2023-1}{-2023+1517}+\frac{\sqrt{|-2023|-2023}+\sqrt{2023-|-2023|}}{-2023-2023}\right)^{2024}=0,\ \ n-4^{2024}=0,\ \ n=4^{2024}.$$

Cum $n=4^{2024}=(4^2)^{1012}=16^{1012}$, obținem că ultima cifră a numărului n este 6.

Răspuns: Ultima cifră a numărului n este 6.

7.2. Mihai scrie pe tablă 17 numere naturale. Demonstrați că Diana oricând poate alege 5 numere dintre cele scrise de Mihai, astfel încât suma numerelor alese de Diana să fie divizibilă cu 5.

Soluție.

Restul împărțirii la 5 a oricărui număr natural este $0, 1, 2, 3$ sau 4. Fie A_i, unde $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, mulțimea numerelor care au restul i la împărțirea la 5. Din datele problemei, fiecare număr scris de Mihai aparține uneia dintre mulțimile A_i. Dacă fiecare mulțime A_i conține cel puțin un număr, atunci Diana poate alege cele 5 numere câte unul din fiecare mulțime A_i. Astfel, rezultatul sumei acestor 5 numere va avea ultima cifră 0, ceea ce implică divizibilitatea cu 5.

Dacă cel puțin una dintre mulțimile A_i este vidă, atunci conform principiul lui Dirichlet (principiul cutiei), va exista o mulțime din cele rămase, care va conține cel puțin 5 numere. În acest caz, Diana poate alege 5 numere, care aparțin aceleiași mulțimi, iar suma lor va fi divizibilă cu 5, deoarece ele au același rest.

7.3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Perpendiculara dusă în A pe AC și perpendiculara dusă în B pe AB se intersectează în punctul D. Pe latura AD se ia un punct interior E, astfel încât triunghiurile ABD

și CAE sunt congruente. Lungimea laturii AB este de $10\,cm$, iar $EB \perp BC$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

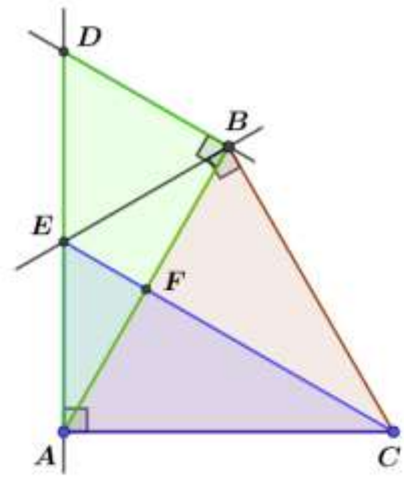
Soluție.

Din condiția că $\Delta ABD \equiv \Delta CAE$, rezultă $\angle DAB \equiv \angle ECA$. Fie $m(\measuredangle DAB) = \alpha = m(\measuredangle ECA)$. Atunci $m(\measuredangle ADB) = 90^\circ - \alpha = m(\measuredangle AEC)$. Fie $AB \cap EC = \{F\}$. În triunghiul AFE, cu $m(\measuredangle EAF) = \alpha$ și $m(\measuredangle AEF) = 90^\circ - \alpha$, obținem $m(\measuredangle EFA) = 90^\circ$. Astfel, $CE \perp AB$.

Din condiția că $\Delta ABD \equiv \Delta CAE$, rezultă $AB \equiv CA$, $DB \equiv EA$. Deoarece $AB \equiv CA$, rezultă că ΔABC este isoscel. Astfel, $m(\measuredangle ABC) = m(\measuredangle BCA) = 0{,}5 \cdot \left(180^\circ - m(\measuredangle BAC)\right) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Deoarece $EB \perp BC$, obținem $m(\measuredangle EBF) = 90^\circ - m(\measuredangle ABC) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Deoarece $AB \perp BD$, obținem $m(\measuredangle EBD) = 90^\circ - m(\measuredangle EBF) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$.



Deoarece ΔEFB este dreptunghic, cu $m(\measuredangle EBF) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, obținem $m(\measuredangle BEF) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Deoarece ΔAFE este dreptunghic, cu $m(\measuredangle EAF) = \alpha$, obținem $m(\measuredangle AEF) = 90^\circ - \alpha$.

Deoarece $m(\measuredangle DEB) = 180^\circ - m(\measuredangle BEF) - m(\measuredangle AEF) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$, obținem $\angle DEB \equiv \angle DBE$. Astfel, ΔDEB este isoscel cu $DE \equiv DB$.

Deoarece $DB \equiv EA$ și $DE \equiv DB$, obținem $DE \equiv EA$. De aici, obținem E – mijlocul lui AD. Astfel, BE reprezintă mediană dusă către ipotenuza DA în triunghiul dreptunghic DBA. Cum, BE reprezintă mediană dusă către ipotenuza DA, obținem $BE = 0{,}5DA = DE$. Deci, ΔDEB este echilateral.

Deoarece ΔDEB este echilateral, rezultă $m(\measuredangle EDB) = 60^\circ = 90^\circ - \alpha$, sau $\alpha = 30^\circ$. Deci, $m(\measuredangle BAC) = 60^\circ$.

Deoarece ΔABC este isoscel cu $m(\measuredangle BAC) = 60^\circ$, rezultă că ΔABC este echilateral cu lungimea laturilor egale cu $10\ cm$. Deci $P_{\Delta ABC} = 30\ cm$.

Răspuns: $P_{\Delta ABC} = 30\ cm$.

7.4. Determinați toate numerele naturale n, care au exact patru divizori pozitivi, știind că suma tuturor divizorilor pozitivi ai numărului n este de două ori mai mare decât n.

Soluție:

Deoarece numărul natural n are exact patru divizori pozitivi, rezultă că numărul are forma $n = p \cdot q$, $p \neq q$ sau $n = p^3$, unde p și q sunt numere prime.

Presupunem că $n = p \cdot q$. Atunci divizorii pozitivi ai numărului n sunt $1, p, q$ și $p \cdot q$. Din datele problemei obținem ecuația $1 + p + q + pq = 2pq$, echivalentă cu

$pq - p - q = 1 \quad \Leftrightarrow p(q-1) - q + 1 = 2 \quad \Leftrightarrow (q-1)(p-1) = 2.$

Ultima relație poate avea loc doar în două cazuri: 1) $q - 1 = 1$ și $p - 1 = 2$ sau 2) $q - 1 = 2$ și $p - 1 = 1$. Astfel, $q = 2, p = 3$ sau $q = 3, p = 2$. În ambele cazuri, obținem $n = 6$.

Presupunem că $n = p^3$. Atunci divizorii pozitivi ai numărului n sunt $1, p, p^2$ și p^3. Din datele problemei obținem ecuația $1 + p + p^2 + p^3 = 2p^3$. Deoarece $2p^3 \vdots p$ și $(p + p^2 + p^3) \vdots p$ rezultă $1 \vdots p$. Contradicție deoarece $p \geq 2$.

Răspuns: $n = 6$.