РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 4 марта 2023 г., VII класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

7.1. Натуральное число n и действительное число a удовлетворяют соотношению:

$$n-\left(\frac{a-1}{a+1517}+\frac{\sqrt{|a|-2023}+\sqrt{2023-|a|}}{a-2023}\right)^{2024}=0.$$

Определите последнюю цифру числа n.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Аргументирует, что $\lvert a\rvert=2023$	2 балла
2.	Аргументирует, что единственное допустимое значение для a равно $a=-2023$	2 балла
3.	Получает $n=4^{2024}$.	1 балл
4.	Аргументирует, что последняя цифра числа $n=4^{2024}$ равна 6.	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

7.2. Майкл пишет на доске 17 натуральных чисел. Покажите, что Диана всегда может выбрать 5 чисел из тех, что написал Майкл, так, чтобы сумма чисел, выбранных Дианой, была кратна 5.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Рассмотрение множеств A_i, где $i\in\{0,1,2,3,4\}$, представляет собой множество чисел, написанных Майклом, которые имеют которые имеют остаток i при делении на 5.	1 балл
2.	Описание того, как Диана выбирает 5 чисел, если каждое множество A_i имеет хотя бы один элемент.	2 балла
3.	Описание того, как Диана выбирает 5 чисел, если хотя бы одно из множества A_i пусто. В частности, предполагая, что если хотя бы одно множество A_i пусто, доказывает, что существует множество из оставшихся множеств, содержащее 5 чисел- *ставится 2 балла*. В частности, если существует множество A_i содержащее 5 чисел, доказывает, что эти 5 элементов могут быть взяты - *ставится 1 балл*	4 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

Замечание 1: за рассмотрение частных случаев чисел (например, последовательных чисел, других конкретных чисел и т.д.) *баллы не ставится*

7.3. Дан остроугольный треугольник ABC. Перпендикуляр, проведенный через A к AC, и перпендикуляр, проведенный через B к AB, пересекаются в точке D. На стороне AD берется внутренняя точка E такая, что треугольники ABD и CAE конгруэнтны. Длина стороны AB равна 10 см, а $EB \perp BC$. Вычислите периметр треугольника ABC.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Аргументирует, что ΔABC равнобедренный.	1 балл
2.	Аргументирует, что $CE \perp AB$.	2 балла
3.	Аргументирует, что ΔDEB равнобедренный.	2 балла
4.	Аргументирует, что ΔABC равносторонний и получение $P_{\Delta ABC} = 30$ см.	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

7.4. Определите все натуральные числа n, имеющие ровно четыре положительных делителя, зная, что сумма всех положительных делителей числа n в два раза больше, чем n.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Вывод о том, что число n имеет вид $n = p \cdot q,\ p \neq q$ или $n = p^3$ где p и q - простые числа (1 балл за каждую возможную форму числа n).	2 балла
2.	Для $n = p \cdot q$ получает уравнение $1 + p + q + pq = 2pq$.	1 балл
3.	Аргументирует, что единственные решения уравнения $1 + p + q + pq = 2pq$ являются $q = 2, p = 3$ или $q = 3, p = 2$ а $n = 6$.	2 балла
4.	Для $n = p \cdot q$ получает уравнение $1 + p + p^2 + p^3 = 2p^3$.	1 балл
5.	Аргументирует, что уравнения $1 + p + p^2 + p^3 = 2p^3$ не имеет решений в простых числах.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов