

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a VII-a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

7.1. Numărul natural n și numărul real a verifica relația $n - \left(\frac{a - 1}{a + 1517} + \frac{\sqrt{ a - 2023} + \sqrt{2023 - a }}{a - 2023} \right)^{2024} = 0.$ Determinați ultima cifră a numărului n .		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Argumentarea că $ a = 2023$	2 puncte
2.	Argumentarea că unica valoare admisibilă pentru a este $a = -2023$	2 puncte
3.	Obținerea că $n = 4^{2024}$	1 punct
4.	Argumentarea că ultima cifră a numărului $n = 4^{2024}$ este 6.	2 puncte
Punctaj total		7 puncte

7.2. Mihai scrie pe tablă 17 numere naturale. Demonstrați că Diana oricând poate alege 5 numere dintre cele scrise de Mihai, astfel încât suma numerelor alese de Diana să fie divizibilă cu 5.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Considerarea mulțimilor A_i , unde $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, reprezintă mulțimea numerelor scrise de Mihai care au restul i la împărțirea cu 5.	1 punct
2.	Descrierea modului în care Diana alege cele 5 numere în cazul în care fiecare mulțime A_i , are cel puțin un element.	2 puncte
3.	Descrierea modului în care Diana alege cele 5 numere în cazul în care cel puțin una din mulțimile A_i , este vidă. În particular, în cazul când presupune că există o mulțime A_i vidă, arată că există o mulțime care conține 5 elemente - <i>se acordă 2 puncte</i> ; În particular, în cazul când există o mulțime A_i cu 5 elemente, arată că se pot lua aceste 5 elemente - <i>se acordă 1 punct</i>	4 puncte
Punctaj total		7 puncte

Remarca 1: Pentru considerarea cazurilor particulare de numere (de exemplu, numere consecutive, alte numere concrete, etc.) *nu se acordă puncte.*

7.3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Perpendiculara dusă în A pe AC și perpendiculara dusă în B pe AB se intersectează în punctul D . Pe latura AD se ia un punct interior E , astfel încât triunghiurile ABD și CAE sunt congruente. Lungimea laturii AB este de 10 cm , iar $EB \perp BC$. Calculați perimetrul triunghiului ABC .

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Argumentarea că ΔABC este isoscel	1 punct
2.	Argumentarea că $CE \perp AB$	2 puncte
3.	Argumentarea că ΔDEB este isoscel	2 puncte
4.	Argumentarea că ΔABC este echilateral și obținerea $P_{\Delta ABC} = 30\text{ cm}$	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

7.4. Determinați toate numerele naturale n , care au exact patru divizori pozitivi, știind că suma tuturor divizorilor pozitivi ai numărului n este de două ori mai mare decât n .

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Deducerea că numărul n are forma $n = p \cdot q$, $p \neq q$ sau $n = p^3$, unde p și q sunt numere prime (câte 1 puncte pentru fiecare formă posibilă a numărului n).	2 puncte
2.	Pentru $n = p \cdot q$ obținerea ecuației $1 + p + q + pq = 2pq$.	1 punct
3.	Argumentarea că unicele soluții ale ecuației $1 + p + q + pq = 2pq$ sunt $q = 2, p = 3$ sau $q = 3, p = 2$ iar $n = 6$.	2 puncte
4.	Pentru $n = p^3$ obținerea ecuației $1 + p + p^2 + p^3 = 2p^3$.	1 punct
5.	Argumentarea că ecuația $1 + p + p^2 + p^3 = 2p^3$ nu are soluții în numere prime.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte