OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

Ziua a doua, 3 martie 2024, Clasa a XII–a

Soluții

12.5. Fie numărul $A = C_{2024}^1 + 3 \cdot C_{2024}^3 + 5 \cdot C_{2024}^5 + \cdots + 2023 \cdot C_{2024}^{2023}$. Determinați numărul de divizori pozitivi ai numărului A.

Soluție.

$$(1+x)^{2024} = C_{2024}^0 + x \cdot C_{2024}^1 + x^2 \cdot C_{2024}^2 + x^3 \cdot C_{2024}^3 + \cdots + x^{2024} \cdot C_{2024}^{2024}$$

Derivând parte cu parte ultima egalitate obținem

$$2024(1+x)^{2023} = C_{2024}^1 + 2xC_{2024}^2 + 3x^2C_{2024}^3 + \cdots + 2024x^{2023}C_{2024}^{2024}.$$

Pentru $x = 1$ și $x = -1$ obținem respectiv

$$2024 \cdot 2^{2023} = C_{2024}^1 + 2C_{2024}^2 + 3C_{2024}^3 + \cdots + 2024C_{2024}^{2024},$$
$$0 = C_{2024}^1 - 2C_{2024}^2 + 3C_{2024}^3 - \cdots - 2024C_{2024}^{2024}.$$

Adunând parte cu parte ultimele două egalități, obținem

$$2024 \cdot 2^{2023} = 2C_{2024}^1 + 2 \cdot 3C_{2024}^3 + \cdots + 2 \cdot 2023C_{2024}^{2023}$$

Împărțind la 2 ambele părți ale egalității, avem $A = 1012 \cdot 2^{2023} = 11 \cdot 23 \cdot 2^{2025}$.

Dacă d este divizor pozitiv al lui A, atunci are forma $d = 11^i \cdot 23^j \cdot 2^k$, unde $i = \overline{0,1}$, $j = \overline{0,1}$, $k = \overline{0,2025}$. Astfel avem $2 \cdot 2 \cdot 2026 = 8104$ divizori pozitivi ai numărului A.

Altă soluție. Scriind $A = 2023 \cdot C_{2024}^{2023} + 2021 \cdot C_{2024}^{2021} + \cdots + 3 \cdot C_{2024}^3 + C_{2024}^1$, și adunând cu $A = C_{2024}^1 + 3 \cdot C_{2024}^3 + 5 \cdot C_{2024}^5 + \cdots + 2023 \cdot C_{2024}^{2023}$, obținem

$2A = 2024\,(C_{2024}^1 + C_{2024}^3 + C_{2024}^5 + \cdots + C_{2024}^{2023}) = 2024 \cdot 2^{2023}$, de unde

$A = 1012 \cdot 2^{2023} = 11 \cdot 23 \cdot 2^{2025}$, cu raționamentele respective.

12.6. Determinați toate primitivele funcției $f\colon (1,\ \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 2x\right)\ln(x^4 + x^2\ln x - 1).$$

Soluție.

$$\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 2x\right)\ln(x^4 + x^2\ln x - 1)dx = \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 2x\right)\ln\left(x^2\left(x^2 + \ln x - \frac{1}{x^2}\right)\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 2x\right)\ln x^2 dx + \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 2x\right)\ln\left(x^2 + \ln x - \frac{1}{x^2}\right)dx = 2\,I_1 + I_2,$$

unde

$$I_1 = \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 2x\right) \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 2x\right) dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = -\frac{1}{x^2} + \ln x + x^2 \end{matrix} \right| =$$

$\left(-\frac{1}{x^2} + \ln x + x^2\right) \ln x - \int \left(-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} \ln x + x\right) dx = \left(-\frac{1}{x^2} + \ln x + x^2\right) \ln x - \frac{1}{2x^2} - \frac{\ln^2 x}{2} - \frac{x^2}{2} + C_1, C_1 \in \mathbb{R},$

$$I_2 = \int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 2x\right) \ln\left(x^2 + \ln x - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 + \ln x - \frac{1}{x^2} \\ dt = \left(2x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) dx \end{matrix} \right| =$$

$$\int \ln t\, dt = \left| \begin{matrix} u = \ln t & dv = dt \\ du = \frac{1}{t} dt & v = t \end{matrix} \right| = t \ln t - \int dt = t \ln t - t + C_2 = t(\ln t - 1) + C_2 =$$

$$= \left(x^2 + \ln x - \frac{1}{x^2}\right)\left(\ln\left(x^2 + \ln x - \frac{1}{x^2}\right) - 1\right) + C_2, \ \ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Astfel primitivele funcției f sunt : $F: (1, \ \infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = -\ln^2 x - \ln x - 2x^2 + \left(x^2 + \ln x - \frac{1}{x^2}\right) \ln(x^4 + x^2 \ln x - 1) + C \,, C \in \mathbb{R} \ .$$

12.7. Fie $ABCA_1B_1C_1$ o prismă triunghiulară regulată, iar punctul P – mijlocul muchiei BB_1. Punctul Q aparține bazei ABC, iar punctul R aparține feței laterale ACC_1A_1, astfel încât $B_1R \parallel PQ$, $PQ = 9$ cm, $B_1R = 12$ cm, $QR = 2\sqrt{3}$ cm. Determinați valoarea maximă a volumului prismei $ABCA_1B_1C_1$.

Soluție. Fie K punctul de intersecție a dreptelor BQ și AC.

Deoarece $(PQR) \perp (ABC)$ și $(A_1AC) \perp (ABC)$ implică $RK \perp (ABC)$ și respectiv $RK \parallel BB_1$.

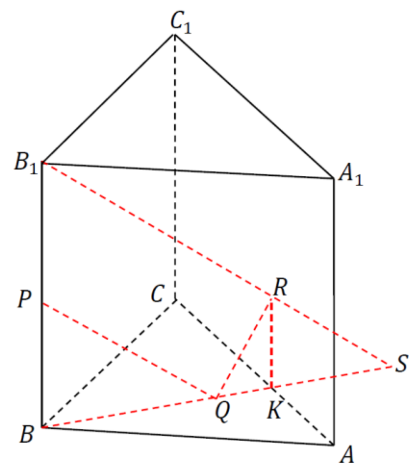
Fie S punctul de intersecție a dreptelor BQ și B_1R. Atunci $\Delta PBQ \sim \Delta B_1BS$, iar PQ este linie mijlocie în ΔB_1BS. Atunci $B_1S = 18$ cm, $RS = 6$ cm, $BQ = QS$, $BP = PB_1$.

Notăm prin $x = BP = PB_1$ și $y = BQ = QS$.

$\Delta RKS \sim \Delta B_1BS$ implică $\frac{RK}{B_1B} = \frac{RS}{B_1S} = \frac{KS}{BS} \Leftrightarrow \frac{RK}{2x} = \frac{6}{18} = \frac{KS}{2y}$ și

respectiv

$$\begin{cases} KS = \frac{2}{3}y \\ RK = \frac{2}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} QK = y - \frac{2}{3}y \\ RK = \frac{2}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} QK = \frac{1}{3}y \\ RK = \frac{2}{3}x \end{cases}.$$



În triunghiul dreptunghic QKR obținem

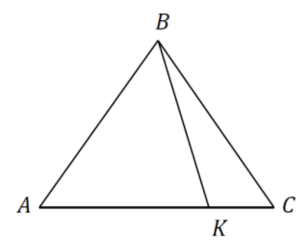
$$QR^2 = QK^2 + RK^2 \Leftrightarrow 12 = \frac{1}{9}y^2 + \frac{4}{9}x^2.$$

Iar în triunghiul dreptunghic PBQ obținem

$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 \Leftrightarrow 81 = x^2 + y^2.$$

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 81 \end{cases}$ și obținem $x = 3$ cm și $y = 6\sqrt{2}$ cm, ceea ce implică $B_1B = 6$ cm, $BK = 2y - \frac{2}{3}y = 8\sqrt{2}$ cm.

$V_{prismei} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} B_1B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, unde a este lungimea laturii bazei prismei. Valoarea maximă a volumului prismei se obține pentru cea mai mare valoare a lui a.



Deoarece $BK^2 \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \sqrt{3}A_{ABC}$, obținem că $A_{ABC} \leq \frac{128}{\sqrt{3}}$ cu egalitate în cazul când BK este înălțime în triunghiul ABC.

Atunci valoarea maximă a lui a este $\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, iar valoarea maximă a volumului prismei $ABCA_1B_1C_1$ este $256\sqrt{3}\ cm^3$.

12.8. Fie $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}^*$. Considerăm mulțimea E a tuturor matricelor de forma M^n, P^k, M^nP^k, $n, k \in \mathbb{N}^*$. Determinați valorile lui a, pentru care mulțimea E conține exact 2025 de elemente.

Soluție. Observăm că $MP = PM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. Aceasta implică $M^lP^s = \begin{cases} M^{l-s}, l > s, \\ P^{s-l}, l < s, \\ I_3,\ l = s. \end{cases}$

Observăm că

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix},\ P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \end{pmatrix}, P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^3} \end{pmatrix}.$$

Atunci prin inducție, se arată că

$$M^{3k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{3k+1} \\ a^{3k+1} & 0 & 0 \\ 0 & a^{3k+1} & 0 \end{pmatrix} = a^{3k}M\ ,\ \ M^{3k+2} = \begin{pmatrix} 0 & a^{3k+2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{3k+2} \\ a^{3k+2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^{3k} \cdot M^2,$$

$M^{3k+3} = \begin{pmatrix} a^{3k+3} & 0 & 0 \\ 0 & a^{3k+3} & 0 \\ 0 & 0 & a^{3k+3} \end{pmatrix} = a^{3k} \cdot M^3, \ \forall k \in \mathbb{N}.$

$P^{3k+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a^{3k+1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^{3k+1}} \\ \frac{1}{a^{3k+1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^{3k} P \ , \quad P^{3k+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a^{3k+2}} \\ \frac{1}{a^{3k+2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^{3k+2}} & 0 \end{pmatrix} = a^{3k} \cdot P^2,$

$P^{3k+3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^{3k+3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^{3k+3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^{3k+3}} \end{pmatrix} = a^{3k} \cdot P^3, \ \forall k \in \mathbb{N}.$

Din condiția că mulțimea E are un număr finit de elemente, rezultă că pentru un oarecare $k \in \mathbb{N}^*$, $\exists p \in \mathbb{N}^*, \ p > k,$ astfel încât $M^{3k+t} = M^{3p+t}$, adică $a^{3k+t} = a^{3p+t} \Leftrightarrow a^{3(p-k)} = 1$.

Astfel, $\exists s \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a^{3s} = 1$. Fie s_0 cel mai mic dintre numerele s pentru care $a^{3s} = 1$.

Atunci $M^{3s_0} = P^{3s_0} = I_3$.

Pe de altă parte,

$$\frac{1}{a^{3k+1}} = \frac{a^{3s_0}}{a^{3k+1}} = a^{3(s_0-k-1)+2}, \qquad \frac{1}{a^{3k+2}} = \frac{a^{3s_0}}{a^{3k+2}} = a^{3(s_0-k-1)+1} \ .$$

Ceea ce implică $P^{3k+1} = M^{3(s_0-k-1)+2}$ și $P^{3k+2} = M^{3(s_0-k-1)+1}, \ \forall k < s_0$.

Este evident că $a \neq 1$. Altfel $cardE = 3$. Am obținut că $E = \{M^n, \ n = 1, 2, \dots, 3s_0\}$.

$cardE = 2025$ implică $3s_0 = 2025$ și respectiv

$\begin{cases} a^{2025} = 1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \cos\frac{2k\pi}{2025} + i\sin\frac{2k\pi}{2025}, \ \ 1 \le k \le 2024, \ \ (k, 2025) = 1.$

Dacă $(k, 2025) = d \neq 1$ și $2025 = d \cdot s, \ k = d \cdot t$, atunci $a = \cos\frac{2t\pi}{s} + i\sin\frac{2t\pi}{s}$ și $a^s = 1$, iar mulțimea E are $s < 2025$ de elemente.