OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 2 martie 2024, Clasa a XII–a
Soluții

12.1. Calculați:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin x + x^{2024}) \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) dx.$$

Soluție.
$I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin x + x^{2024}) \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^{2024} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) dx.$
Funcția $f(x) = x^{2024} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$ este impară.
Într-adevăr, $f(-x) = (-x)^{2024} \ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) = x^{2024} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{-1} = -f(x).$
Atunci $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^{2024} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) dx = 0$. Obținem că

$$I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) dx = \left| \begin{matrix} u = \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) & dv = \sin x\, dx \\ du = \frac{2}{\cos x} dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= -2\cos x \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} dx = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\ln 3.$$

12.2. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $|z^3 + z| + |z| = |z|^3$.

Soluție. Observăm că $z = 0$ este soluție a ecuației date.
Pentru $z \neq 0$ obținem $|z^2 + 1| + 1 = |z^2|$.
Fie $z^2 = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$.
Obținem $\sqrt{(a+1)^2 + b^2} + 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} - 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = -\sqrt{a^2 + b^2} \\ \sqrt{a^2 + b^2} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ b^2 = 0 \\ a^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -1] \\ b = 0 \end{cases}.$$

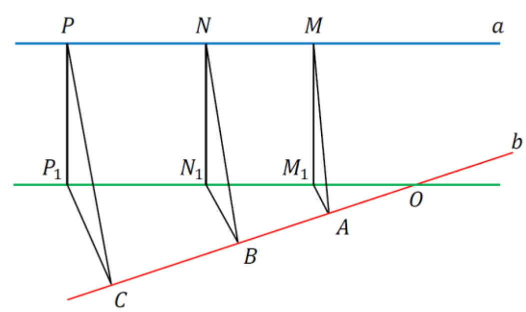
Am obținut $z^2 = -s^2 \Leftrightarrow z = \pm si$, unde $s \in [1; +\infty)$.
Atunci $S = \{0\} \cup \{\pm s\, i \mid s \in [1; +\infty)\}$.

Altă soluție: Este cunoscut că pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1 = kz_2, k \in \mathbb{R}, k \geq 0$. Atunci $|z^2| = |(z^2 + 1) + (-1)| = |z^2 + 1| + |-1| = |z^2 + 1| + 1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = k \cdot (-1), k \geq 0, \Leftrightarrow z^2 = -k - 1, k \geq 0$. Astfel, z^2 este un număr real mai mic sau egal decât -1, de unde $z^2 = -s^2 \Leftrightarrow z = \pm si$, unde $s \in [1; +\infty)$.

12.3. Fie dreptele necoplanare a și b. Pe dreapta a sunt luate punctele M, N și P, în această ordine, astfel încât $MN = 15$ cm, $NP = 20$ cm. Punctele M, N și P se află la distanța 17 cm, 25cm și 39 cm, respectiv, de la dreapta b. Determinați distanța dintre dreptele a și b.

Soluție. Fie π un plan ce conține dreapta b și este paralel dreptei a. Fie M_1, N_1, P_1 proiecțiile punctelor M, N, P pe planul π, respectiv. Atunci punctele M_1, N_1, P_1 sunt coliniare și

$MM_1 = NN_1 = PP_1 = dist(a, \pi) = dist\,(a, b) = d.$



Notăm cu A, B și C proiecțiile punctelor M_1, N_1 și P_1, respectiv, pe dreapta b.

Atunci $MA = 17$ cm, $NB = 25$ cm, $PC = 39$ cm.

Deoarece $[M_1P_1]$ este proiecția lui $[MP]$ pe planul π, obținem $M_1N_1 = MN = 15$ cm, $N_1P_1 = 20$ cm.

Atunci

$$\begin{cases} d^2 = 17^2 - M_1A^2, \\ d^2 = 25^2 - N_1B^2, \\ d^2 = 39^2 - P_1C^2. \end{cases} \tag{1}$$

Fie O punctul de intersecție a dreptelor b și M_1P_1. Fie că punctele O, A, B, C sunt distincte și sunt situate pe dreapta b în această ordine. Atunci $\frac{OP_1}{P_1C} = \frac{ON_1}{N_1B} = \frac{OM_1}{M_1A}$. Fie $t = OM_1$.

Obținem $\frac{35+t}{P_1C} = \frac{15+t}{N_1B} = \frac{t}{M_1A}$. Înlocuim ultimele egalități în sistemul (1) și obținem:

$t = 10$ cm, $\quad M_1A = 8$ cm, $\;N_1B = 20$ cm, $\;P_1C = 36$ cm, $\;d = 15$ cm.

În cazul altei poziționări a punctului O pe dreapta b în raport cu punctele A, B, C, folosind aceleași raționamente, se obține aceeași valoare a lui d.

Fie că una dintre valorile M_1A, N_1B și P_1C este egală cu 0, de exemplu, $M_1A = 0$. Atunci punctele O, M_1 și A coincid și $d = 17$, $N_1B = \sqrt{336}$ cm, $P_1C = \sqrt{1232}$ cm.

Pe de altă parte, $\frac{MP_1}{P_1C} = \frac{MN_1}{N_1B}$, de unde $\frac{35}{\sqrt{1232}} = \frac{15}{\sqrt{336}}$ – afirmație falsă. Astfel, $d = 15$ cm.

12.4. Determinați toate funcțiile $f\colon \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ derivabile cu derivată continuă, pentru care

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((f'(x))^2 + f^2(x)(2tg^2x + 1)\right) dx \leq 2, \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

Soluție.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((f'(x))^2 + f^2(x)(2tg^2x + 1)\right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((f'(x))^2 + f^2(x)tg^2x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)(tg^2x + 1)\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f'(x) - f(x)tgx)^2\, dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)f(x)tg(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,\frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f'(x) - f(x)tgx)^2\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(f^2(x)\right)' tg(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,\frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f'(x) - f(x)tgx)^2\, dx + f^2(x)tg(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,\frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f'(x) - f(x)tgx)^2\, dx + 2.$$

Din condiție rezultă că

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (f'(x) - f(x)tgx)^2\, dx \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) - f(x)tgx = 0 \Leftrightarrow f'(x)\cos x - f(x)\sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (f(x)\cos x)' = 0 \Leftrightarrow f(x)\cos x = C,\ C \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow f(x) = \frac{C}{\cos x},\ C \in \mathbb{R}.$

Condiția $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ implică $C = 1$ și $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.