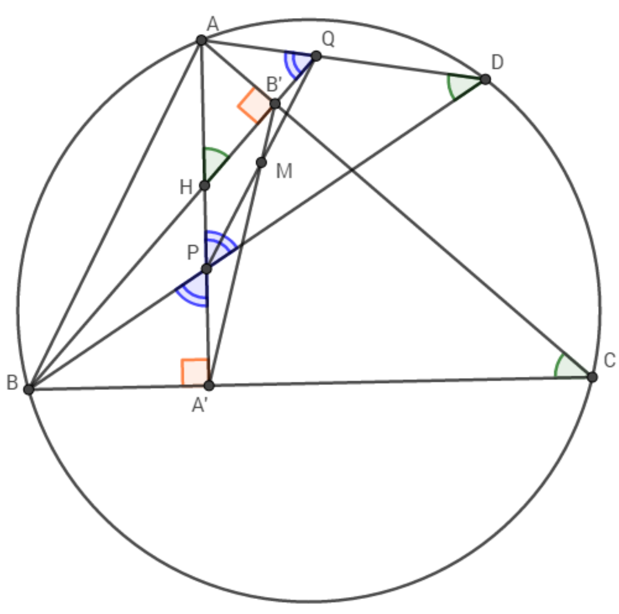
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 3 martie 2024, Clasa a XI–a
Soluții

11.5. Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2024}$ și fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) + \cdots + a_{2024} \sin(2024x), \forall x \in \mathbf{R}.$$
Demonstrați că, dacă $|f(x)| \le |\sin x|, \forall x \in \mathbf{R}$, atunci este adevărată inegalitatea
$$|a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 2024a_{2024}| \le 1.$$

Soluție. Din $|f(x)| \le |\sin x|, \forall x \in \mathbf{R}$, rezultă
$$\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \le 1, \forall x \in \mathbf{R}\backslash\{\pi n | n \in \mathbf{Z}\}. \qquad (1)$$
Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin x) = 0$, funcțiile f și $\sin x$ sunt derivabile și $(\sin x)' = \cos x \ne 0$ într-o vecinătate a lui 0, putem aplica regula lui l'Hospital pentru calcularea $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}$.
Așadar,
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{a_1 \cos x + a_2 \cos(2x)\cdot 2 + \dots + a_{2024}\cos(2024x)\cdot 2024}{\cos x} =$$
$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 2024a_{2024}. \qquad (2)$$
Din rezultatele obținute în relațiile (1) și (2), obținem concluzia problemei
$$|a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 2024a_{2024}| = \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| \le 1.$$

11.6. În triunghiul ascuțitunghic ABC, A' și B' sunt picioarele înălțimilor din A și, respectiv, B. Fie D un punct de pe arcul mic $\overset{\frown}{AC}$ al cercului circumscris triunghiului ABC, astfel încât $0 < m(\angle CBD) < m(\angle CBB')$. Fie punctele P și Q, astfel încât $\{P\} = AA' \cap BD$ și, respectiv, $\{Q\} = BB' \cap AD$. Arătați că dreapta $A'B'$ trece prin mijlocul segmentului $[PQ]$.

Soluție.



Fie M mijlocul segmentului $[PQ]$ și H ortocentrul triunghiului ABC.

Din teorema lui Menelaus pentru triunghiul HPQ,

$$B'-M-A' \Leftrightarrow \frac{HA'}{PA'}\cdot\frac{PM}{QM}\cdot\frac{QB'}{HB'}=1 \overset{PM=QM}{\Longleftrightarrow} \frac{HA'}{PA'}\cdot\frac{QB'}{HB'}=1 \Leftrightarrow \frac{HA'}{HB'}=\frac{PA'}{QB'}. \quad (1)$$

Observăm

$$m(\angle AHQ)=m(\angle AHB')=\frac{\pi}{2}-m(\angle HAB')=\frac{\pi}{2}-m(\angle A'AC)=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-m(\angle ACB)\right)=$$
$$m(\angle ACB)=m(\angle ADB)=m(\angle QDP).$$

Așadar,

$$m(\angle QHP)+m(\angle QDP)=\pi-m(\angle AHQ)+m(\angle QDP)=\pi.$$

Deci, patrulaterul $HQDP$ este inscriptibil.
Prin urmare,

$$m(\angle AQB')=m(\angle AQH)=\pi-m(\angle HQD)=m(\angle HPD)=m(\angle BPA').$$

Cum $m(\angle AB'Q)=m(\angle BA'P)=\frac{\pi}{2}$, rezultă $\Delta AB'Q \sim \Delta BA'P$.
Deci,

$$\frac{PA'}{QB'}=\frac{BA'}{AB'}. \quad (2)$$

În triunghiurile dreptunghice $AB'H$ și $BA'H$, $\angle AHB'$ și $\angle BHA'$ sunt opuse la vârf.
Așadar,

$$\Delta BHA' \sim \Delta AHB' \Rightarrow \frac{BA'}{AB'}=\frac{HA'}{HB'} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{PA'}{QB'}=\frac{HA'}{HB'}.$$

Deci, am arătat că are loc relația (1), de unde și concluzia problemei.

11.7. Șirul de numere naturale $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ verifică relațiile: $x_1=3,\ x_{n+1}={x_n}^2-2, \forall n\in\mathbf{N}^*$. Arătați că există limita

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n}{x_{n+1}}.$$

Calculați-o.

Soluție. Vom arăta că șirul dat este strict crescător și deci are limita $+\infty$.
Avem

$$x_{n+1}>x_n \Leftrightarrow {x_n}^2-2>x_n \Leftrightarrow {x_n}^2-x_n-2=(x_n-2)(x_n+1)>0 \Leftrightarrow x_n>2,$$

fapt ce rezultă imediat din inducție.
Așadar,

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty.$$

Fie șirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ care verifică relația $y_n={x_n}^2, \forall n\in\mathbf{N}^*$.
Atunci,

$$y_{n+1}=(y_n-2)^2={y_n}^2-4y_n+4 \Rightarrow y_{n+1}-4=y_n(y_n-4).$$

În particular, avem

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=+\infty.$$

Vom aduce la o formă mai simplă valoarea

$$\left(\frac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}{x_{n+1}}\right)^2.$$

$$\left(\frac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}{x_{n+1}}\right)^2=\frac{y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot\ldots\cdot y_n}{y_{n+1}}=\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\cdot\frac{y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot\ldots\cdot y_n}{y_{n+1}-4}=$$
$$\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\cdot\frac{y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot\ldots\cdot y_{n-1}}{y_n-4}=\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\cdot\frac{y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot\ldots\cdot y_{n-2}}{y_{n-1}-4}=\cdots=$$

$$\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\cdot\frac{1}{y_1-4}=\frac{1}{5}\cdot\frac{y_{n+1}-4}{y_{n+1}}\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{1}{5}.$$

Așadar,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}{x_{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

11.8. Fie numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ care verifică relațiile:

$$\begin{cases} a_1 > a_2 > \cdots > a_{2024}, \\ \sin(a_1x)+\sin(a_2x)+\cdots+\sin(a_{2024}x)=0, \forall x\in\mathbf{R}. \end{cases}$$

Demonstrați că

$$a_1+a_{2024}=a_2+a_{2023}=\cdots=a_{1012}+a_{1013}=0.$$

Soluție. Fie funcția $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\sin(a_1x)+\sin(a_2x)+\cdots+\sin(a_{2024}x),\forall x\in\mathbf{R}.$$

Cum $f(x)=0,\forall x\in\mathbf{R}$, avem

$$f'(x)=a_1\cos(a_1x)+a_2\cos(a_2x)+\cdots+a_{2024}\cos(a_{2024}x)=0,$$
$$f'''(x)=-{a_1}^3\cos(a_1x)-{a_2}^3\cos(a_2x)-\cdots-{a_{2024}}^3\cos(a_{2024}x)=0.$$

Observăm că, în general, pentru un k par, avem

$$f^{(2k+1)}(x)={a_1}^{2k+1}\cos(a_1x)+{a_2}^{2k+1}\cos(a_2x)+\cdots+{a_{2024}}^{2k+1}\cos(a_{2024}x)=0,\forall x\in\mathbf{R},$$

iar pentru k impar, avem

$$f^{(2k+1)}(x)=-{a_1}^{2k+1}\cos(a_1x)-{a_2}^{2k+1}\cos(a_2x)-\cdots-{a_{2024}}^{2k+1}\cos(a_{2024}x)=0,\forall x\in\mathbf{R}.$$

Înlocuind x cu 0 în aceste două relații, obținem

$$ {a_1}^{2k+1}+{a_2}^{2k+1}+\cdots+{a_{2024}}^{2k+1}=0,\forall k\in\mathbf{N}. \qquad (1)$$

Cum $a_1+a_2+\cdots+a_{2024}=0$, avem $a_1>0$ și $a_{2024}<0$. Așadar, împărțind relația (1) la ${a_1}^{2k+1}$ și trecând la limită pentru k, obținem

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}+\cdots+\left(\frac{a_{2024}}{a_1}\right)^{2k+1}\right)=0. \qquad (2)$$

Dacă $|a_1|>|a_{2024}|$, atunci $|a_1|>|a_2|, |a_1|>|a_3|, \ldots, |a_1|>|a_{2023}|$.

Așadar,

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^{2k+1}=\cdots=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{a_{2024}}{a_1}\right)^{2k+1}=0,$$

de unde obținem

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}+\cdots+\left(\frac{a_{2024}}{a_1}\right)^{2k+1}\right)=1, \text{ contradicție.}$$

Dacă $|a_1|<|a_{2024}|$, atunci

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{a_{2024}}{a_1}\right)^{2k+1}=-\infty.$$

Cum

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{a_m}{a_1}\right)^{2k+1} \leq 0, \forall m = \overline{2,2023},$$

rezultă

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}+\cdots+\left(\frac{a_{2024}}{a_1}\right)^{2k+1}\right) = -\infty, \text{ contradicție.}$$

Așadar, rămâne $|a_1| = |a_{2024}|$ și cum sunt de semne opuse, avem $a_1 + a_{2024} = 0$. Deci, relația (1) devine

$$a_2{}^{2k+1} + a_3{}^{2k+1} + \cdots + a_{2023}{}^{2k+1} = 0, \forall k \in \mathbf{N}.$$

Din raționamente similare cu relația (2), concluzionăm

$$a_1 + a_{2024} = a_2 + a_{2023} = \cdots = a_{1012} + a_{1013} = 0.$$