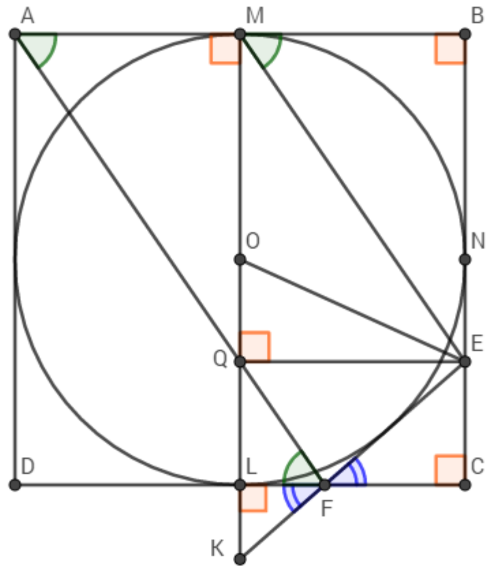
OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 2 martie 2024, Clasa a XI–a
Soluții

11.1. Fie numerele reale a, b și x, astfel încât $1 \le a \le b$ și $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$. Demonstrați că are loc inegalitatea $a^{\sin x} \cdot b^{\cos x} \ge \sqrt{ab}$. Pentru care valori ale numerelor a, b și x are loc egalitatea?

Soluție. Observăm că inegalitatea din enunț se rescrie
$$b^{\cos x - \frac{1}{2}} \ge a^{\frac{1}{2} - \sin x}. \qquad (1)$$
Dacă $a = 1$, relația (1) devine
$$b^{\cos x - \frac{1}{2}} \ge 1 \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \cdot \ln b \ge \ln 1 = 0.$$
Cum $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$, rezultă $\cos x - \frac{1}{2} \ge \cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} = 0$.
Așadar, cum $\ln b \ge 0$, inegalitatea obținută este adevărată, cu egalitate pentru valorile
$$(a, b, x) \in \left\{(1,1,t), \left(1, u, \frac{\pi}{3}\right) \middle| 0 \le t \le \frac{\pi}{3}, 1 < u\right\}.$$
Rămâne de studiat relația (1) pentru $a > 1$.
Vom demonstra inegalitatea
$$\cos x - \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2} - \sin x \Leftrightarrow \sin x + \cos x \ge 1. \qquad (2)$$
Cum $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$, avem $0 \le \sin x < 1$ și $0 < \cos x \le 1$, de unde
$$\sin x + \cos x \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$
cu egalitate pentru
$$\begin{cases} \sin x = \sin^2 x \\ \cos x = \cos^2 x \end{cases} \xLeftrightarrow{\sin x \ne 1, \quad \cos x \ne 0} \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$
Așadar, am demonstrat inegalitatea (2), de unde obținem
$$b^{\cos x - \frac{1}{2}} \ge b^{\frac{1}{2} - \sin x} \ge a^{\frac{1}{2} - \sin x},$$
ceea ce demonstrează relația (1).
Pentru a avea egalitate, este necesar ca $b^{\cos x - \frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2} - \sin x}$, de unde $x = 0$. În continuare,
$$b^{\frac{1}{2} - \sin x} = a^{\frac{1}{2} - \sin x} \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt{a} \Leftrightarrow b = a.$$
În concluzie, toate cazurile de egalitate sunt
$$(a, b, x) \in \left\{(1,1,t), \left(1, u, \frac{\pi}{3}\right), (u, u, 0) \middle| 0 \le t \le \frac{\pi}{3}, 1 < u\right\}.$$

11.2. În pătratul $ABCD$, punctele M, N și L sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ și, respectiv, $[CD]$. Punctele E și F aparțin segmentelor $[NC]$ și, respectiv, $[CL]$, astfel încât dreptele ME și AF sunt paralele. Arătați că dreapta EF este tangentă la cercul înscris în pătratul $ABCD$.

Soluție.



Dacă $E = N$ sau $E = C$, atunci dreapta EF coincide cu dreptele BC sau, respectiv, CD, care sunt tangente la cercul înscris în pătratul $ABCD$.
Rămâne să arătăm cazul când $E \in (NC)$ și, prin urmare, $F \in (LC)$.
Fără a pierde din generalitate, presupunem $AB = BC = CD = DA = 2$.
Notăm $x = CF$ și $y = CE$. Observăm $0 < x < 1$ și $0 < y < 1$, de unde $x + y < 2$. (1)
Fie O centrul pătratului $ABCD$. Paralela prin M la dreapta BC intersectează dreptele AF și EF în punctele Q și, respectiv, K.
Din $AQ \parallel ME$, rezultă $\angle MAQ \equiv \angle BME$. Cum $AM = MB = 1$, rezultă $\Delta AMQ \equiv \Delta MBE$.
Așadar, $AQ = ME$, de unde rezultă că patrulaterul $AMEQ$ este un paralelogram.
Prin urmare,

$$QE = AM = 1, \qquad QE \perp ML.$$

În continuare, vom demonstra că triunghiul KOE este isoscel cu baza OE.
Cum $\angle LFK$ și $\angle CFE$ sunt opuse la vârf, rezultă $\Delta LFK \sim \Delta CFE$.
Prin urmare,

$$\frac{FK}{FE} = \frac{LF}{CF} \Longrightarrow FK = FE \cdot \frac{LF}{CF} = FE \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{FE}{x} - FE \Longrightarrow KE = KF + FE = \frac{FE}{x}. \quad (2)$$

De asemenea,

$$\frac{LK}{CE} = \frac{LF}{CF} \Longrightarrow LK = CE \cdot \frac{LF}{CF} = y \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{y-xy}{x} \Longrightarrow$$

$$KO = KL + LO = \frac{y-xy}{x} + 1 = \frac{x+y-xy}{x}. \quad (3)$$

Cum $QF \parallel ME$ și $LF \parallel MB$, rezultă $\angle QFL \equiv \angle EMB$. Prin urmare, $\Delta QFL \sim \Delta EMB$.
Așadar, folosind $\Delta AMQ \equiv \Delta MBE$,

$$\frac{FL}{MB} = \frac{QL}{EB} = \frac{EC}{EB} \Longrightarrow \frac{1-x}{1} = \frac{y}{2-y} \Longrightarrow 2 - 2x - y + xy = y \Longrightarrow 4 - 4x - 4y + 2xy = 0.$$

Din teorema lui Pitagora pentru triunghiul ECF,

$$FE^2 = CF^2 + CE^2 = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 4 - 4x - 4y + 2xy = (x+y-2)^2.$$

Deci, folosind relația (1),

$$FE = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + y - 2| = 2 - x - y = x + y - xy. \quad (4)$$

Din relațiile (2), (3) și (4), rezultă $KE = KO$, adică triunghiul KOE este isoscel cu baza OE.
Prin urmare, lungimile înălțimilor din vârfurile O și E sunt egale, adică $d(O, EF) = EQ = 1$.
Așadar, concluzionăm că dreapta EF este tangentă la cercul înscris în pătratul $ABCD$.

11.3. Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, pentru care există limita

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)=2024.$$

Arătați că există limita

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Calculați-o.

Soluție. Fie $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de numere reale, astfel încât $s_0=0$ și

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k},\forall n\in\mathbf{N}^*.$$

Atunci, $a_n=n\cdot(s_n-s_{n-1}),\forall n\in\mathbf{N}^*$.
Prin urmare,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\big(k\cdot(s_k-s_{k-1})\big)=\sum_{k=1}^{n}(ks_k)-\sum_{k=0}^{n-1}\big((k+1)s_k\big)=n\cdot s_n-\sum_{k=1}^{n-1}s_k=$$
$$(n+1)\cdot s_n-\sum_{k=1}^{n}s_k.$$

Deci,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{n+1}{n}s_n-\frac{\sum_{k=1}^{n}s_k}{n}.\qquad(1)$$

Observăm

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}s_n=2024\end{cases}\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}s_n=2024.\qquad(2)$$

Fie șirul $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, pentru care

$$t_n=\sum_{k=1}^{n}s_k.$$

Din criteriul Stolz-Cesaro, obținem

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{t_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{t_n-t_{n-1}}{n-(n-1)}=\lim_{n\to+\infty}s_n=2024.\qquad(3)$$

Folosind rezultatele obținute la (2) și (3) în relația (1), concluzionăm

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=2024-2024=0.$$

11.4. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă care satisface următoarele condiții:

$$f(0)=1,f'(0)=0,f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}.$$

Arătați că

$$f(x)\geq 3e^{2x}-2e^{3x},\forall x\geq 0.$$

Soluție. Observăm

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)=f''(x)-2f'(x)-3f'(x)+6f(x)=$$
$$f''(x)-2f'(x)-3\big(f'(x)-2f(x)\big).\qquad(1)$$

Fie funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, g(x)=f'(x)-2f(x)$.
Atunci, $g'(x)=f''(x)-2f'(x)$.

Din relația (1), obținem $g'(x) - 3g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

$$g'(x) - 3g(x) \geq 0 \Longrightarrow e^{-3x} \cdot \big(g'(x) - 3g(x)\big) = (g(x) \cdot e^{-3x})' \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Deci, funcția $g(x) \cdot e^{-3x}$ este crescătoare, de unde rezultă

$$g(x) \cdot e^{-3x} \geq g(0) \cdot e^{-3\cdot 0} = g(0) = f'(0) - 2f(0) = -2, \forall x \geq 0.$$

De aici,

$$f'(x) - 2f(x) \geq -2e^{3x}, \forall x \geq 0.$$

Prin urmare,

$$f'(x) \cdot e^{-2x} - 2f(x) \cdot e^{-2x} = (f(x) \cdot e^{-2x})' \geq -2e^{x}, \forall x > 0.$$

Așadar,

$$(f(x) \cdot e^{-2x})' \geq -2e^{x}, \forall x > 0 \Longrightarrow (f(x) \cdot e^{-2x} + 2e^{x})' \geq 0, \forall x > 0.$$

Deci, funcția $f(x) \cdot e^{-2x} + 2e^{x}$ este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

Cum funcția f și cea exponențială sunt continue în punctul 0, concluzionăm

$$f(x) \cdot e^{-2x} + 2e^{x} \geq f(0) + 2 = 3, \forall x \geq 0 \Longrightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}, \forall x \geq 0.$$