РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 5 марта 2023 г., X класс

10.5. Дан многочлен с действительными коэффициентами $P(X)$ такой, что $x \cdot P(x+2022)-(x+2023) \cdot P(x)=2022 \cdot x-2023$, для любого $x \in \mathbb{R}$. Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на многочлен $Q(X)=X^{2}+X$.

10.6. Дан остроугольный треугольник ABC в котором $m(\angle BAC)=60^{\circ}$ и $BC=a$. Точка M – середина стороны BC, а $[BB_1]$ и $[CC_1]$ – высоты треугольника. Найдите сумму расстояний от ортоцентра треугольника ABC до сторон треугольника MB_1C_1.

10.7. Даны числа $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ такие, что $\dfrac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}$ – рациональное число. Покажите, что $\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right) \vdots (a+b+c)$.

10.8. Найдите все значения действительного параметра a, для которых уравнение $2 \cdot \left|2 \cdot |x|-a^{2}\right|=x-a$ имеет ровно три действительных решения.

Время работы: 240 минут.
Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. **ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 5 марта 2023 г., X класс

10.5. Дан многочлен с действительными коэффициентами $P(X)$ такой, что $x \cdot P(x+2022)-(x+2023) \cdot P(x)=2022 \cdot x-2023$, для любого $x \in \mathbb{R}$. Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на многочлен $Q(X)=X^{2}+X$.

10.6. Дан остроугольный треугольник ABC в котором $m(\angle BAC)=60^{\circ}$ и $BC=a$. Точка M – середина стороны BC, а $[BB_1]$ и $[CC_1]$ – высоты треугольника. Найдите сумму расстояний от ортоцентра треугольника ABC до сторон треугольника MB_1C_1.

10.7. Даны числа $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ такие, что $\dfrac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}$ – рациональное число. Покажите, что $\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right) \vdots (a+b+c)$.

10.8. Найдите все значения действительного параметра a, для которых уравнение $2 \cdot \left|2 \cdot |x|-a^{2}\right|=x-a$ имеет ровно три действительных решения.

Время работы: 240 минут.
Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. **ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**