РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 4 марта 2023 г., X класс

10.1. Пусть m и n целые числа такие, что $\frac{n^3}{m+n}$ – целое число. Покажите, что $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}$ – целое число.

10.2. Дан остроугольный треугольник ABC и H – внутренняя точка треугольника такая, что $AB^2+CH^2=BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$. Докажите, что H – ортоцентр треугольника ABC.

10.3. Дано выражение $E=\frac{3(x+y)(z+t)}{8}\cdot\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{zt}\right)$, где $x,y,z,t\in[1;3]$. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения выражения E.

10.4. Найдите все значения действительного параметра a, для которых уравнение $\sqrt{x-9}=ax+7a-3$ имеет единственное действительное решение.

Время работы: 240 минут.
Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. **ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 4 марта 2023 г., X класс

10.1. Пусть m и n целые числа такие, что $\frac{n^3}{m+n}$ – целое число. Покажите, что $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}$ – целое число.

10.2. Дан остроугольный треугольник ABC и H – внутренняя точка треугольника такая, что $AB^2+CH^2=BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$. Докажите, что H – ортоцентр треугольника ABC.

10.3. Дано выражение $E=\frac{3(x+y)(z+t)}{8}\cdot\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{zt}\right)$, где $x,y,z,t\in[1;3]$. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения выражения E.

10.4. Найдите все значения действительного параметра a, для которых уравнение $\sqrt{x-9}=ax+7a-3$ имеет единственное действительное решение.

Время работы: 240 минут.
Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов. **ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**