Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 5 martie 2023, Clasa a X–a

10.5. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți reali, astfel încât $x \cdot P(x+2022)-(x+2023) \cdot P(x)=2022 \cdot x-2023$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)=X^2+X$.

10.6. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, în care $m(\angle BAC)=60^{\circ}$, iar $BC=a$. Fie M mijlocul laturii BC, iar $[BB_1]$ și $[CC_1]$ două înălțimi ale triunghiului. Calculați suma distanțelor de la ortocentrul triunghiului ABC până la laturile triunghiului MB_1C_1.

10.7. Fie numerele $a,b,c \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\dfrac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}$ este un număr rațional. Arătați că $(a^2+b^2+c^2) \vdots (a+b+c)$.

10.8. Determinați toate valorile parametrului real a, pentru care ecuația $2 \cdot \left|2 \cdot |x|-a^2\right|=x-a$ are exact trei soluții reale.

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES !**

Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 5 martie 2023, Clasa a X–a

10.5. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți reali, astfel încât $x \cdot P(x+2022)-(x+2023) \cdot P(x)=2022 \cdot x-2023$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)=X^2+X$.

10.6. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, în care $m(\angle BAC)=60^{\circ}$, iar $BC=a$. Fie M mijlocul laturii BC, iar $[BB_1]$ și $[CC_1]$ două înălțimi ale triunghiului. Calculați suma distanțelor de la ortocentrul triunghiului ABC până la laturile triunghiului MB_1C_1.

10.7. Fie numerele $a,b,c \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\dfrac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}$ este un număr rațional. Arătați că $(a^2+b^2+c^2) \vdots (a+b+c)$.

10.8. Determinați toate valorile parametrului real a, pentru care ecuația $2 \cdot \left|2 \cdot |x|-a^2\right|=x-a$ are exact trei soluții reale.

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES !**